

ریاضیات جدید

سال چهارم

آموزش متوسطه عمومی - ریاضی و فیزیک ۲۹۶



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش عالی
تیم چهارم است

$$(p \Rightarrow q) = (q \vee \sim p)$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A'$$

ریاضیات جدید

کتابخانه
آرشیو
وزارت
(۱۳۶۴)

سال چهارم

آموزش متوسطه عمومی

ریاضی و فیزیک

۱۰۷۷۰

مؤلفان ◀◀ • غلامرضا دانش نادرش • میرزا جلیلی

حقوق مادی این اثر متعلق به وزارت
آموزش و پرورش است

صفحه پرداز ◀◀ آزاده اصفری نسب انور

رسام ◀◀ خسرو مدیریان

چاپ از ◀◀ چاپ بهرام



تهران - کیلومتر ۱۵ جاده مخصوص کرج
تهران دارمختار - تلفن: ۴ - ۹۳۱۱۵۱

۱۳۶۷
۵۱۰
۱۵۳
۱۰۵
۱



فهرست

۱	فصل اول منطق ریاضی (یادآوری و تکمیل)
۲۳	فصل دوم حلقه و میدان
۲۹	فصل سوم نظریه اعداد
۶۵	فصل چهارم مانریسها
۱۵۸	مسائل تکمیلی و گزیده‌های از مسائل امتحانات نهایی سراسر کشور

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فصل اول

منطق ریاضی (یادآوری و تکمیل)

در کتاب ریاضیات جدید سال اول با زبان ریاضی آشنا شدید و دیدید که منطق ریاضی دستور زبان ریاضی و یا مطالعه ساختمان انواع جمله‌هایی است که در ریاضی بکار برده می‌شوند. با فراگیری این زبان بسیار دقیق‌تر می‌توانائی خود را دروساندن ایده‌ها به دیگران و یا گرفتن اطلاعات از دیگران افزایش می‌دهیم. البته برای ساختن زبان ریاضی، بناچار از زبان روزمره که گاهی نیز گیج‌کننده و ناراست استفاده می‌کنیم.

در این فصل کتاب، ضمن یادآوری مختصر از آنچه در سال اول دیده‌اید می‌خواهیم با استفاده از دستورهای ساده‌ای از یک دسته گزاره‌های مفروض به یک گزاره دیگر برسیم. و مبحث استنتاج را مورد مطالعه قرار دهیم.

جمله‌هایی که در ریاضی بکار می‌روند جمله‌های خبری هستند که یا درست یا نادرست می‌باشند و آنها را گزاره می‌نامیم: انتقال نظریات و اطلاعات با کمک گزاره‌ها صورت می‌گیرد و استنتاج ما ناشی از ترکیبهای منطقی این گزاره‌ها می‌باشد.

ترکیبهای منطقی و رابطها

به‌منظور تعمیم و کلیت دادن به بحثهای ریاضی از حروف الفبای لاتین p, q, r, \dots برای نمایش گزاره استفاده کرده جملات زبان ریاضی را بصورت فرمول می‌نویسیم. چون در نوشتن، فرمولها را از سمت چپ می‌نویسیم برای ترکیب این حروف از نمادهای ویژه زیر استفاده می‌کنیم:

نماد « \wedge » یا « $\&$ » برای نمایش «و» که آنها را عطف می‌نامیم.

نماد « \vee » برای نمایش «یا» که آنها را فاضل می‌خوانیم.

نماد « \sim » یا «-» برای بیان «چنین نیست که» و آنها را ناقض می‌نامیم.

نماد « \supset » برای نمایش جمله‌های شرطی زبان ریاضی و بیان اگر، آنگاه.

نماد « \Leftarrow » برای نمایش جمله‌های دوشروطی و بیان اگر، آنگاه و برعکس.

اکنون با مجموعه حروف الفباء و نمادهای فوق ترکیبهای منطقی را می‌سازیم:

تعریف - گزاره مرکب (ترکیب منطقی) گزاره‌ای است که از پهلوهای هم نوشتن

تعدادی با پایان از گزاره‌ها و رابط‌ها، طبق قواعد معینی، به دست می‌آید. برای نمایش ترکیب‌های منطقی از حروف بزرگ الفبا استفاده می‌کنند.

نقیض گزاره p ، گزاره $\sim p$ است که نادرست خواهد بود هرگاه p درست باشد و درست است هرگاه p نادرست باشد.

ترکیب عطفی دو گزاره p ، q گزاره $p \wedge q$ است که بنا به تعریف درست است هرگاه p و q با هم درست باشد و در غیر این صورت نادرست می‌باشد.

ترکیب فصلی دو گزاره p ، q گزاره $p \vee q$ است که بنا به تعریف درست است هرگاه حداقل یکی از این گزاره‌ها درست باشد و در غیر این صورت نادرست می‌باشد.

ترکیب شرطی دو گزاره p ، q گزاره $p \Rightarrow q$ است که بنا به تعریف نادرست است هرگاه p درست و q نادرست باشد و در غیر این صورت درست است.

گزاره شرطی اگر p آنگاه q اگر همیشه درست باشد به صورتهای زیر نیز بیان میشود.

- p نتیجه می‌دهد q را.
- q اگر p .
- q شرط لازم برای p است.
- p شرط کافی برای q است.
- شرط لازم برای p آن است که q .
- شرط کافی برای q آن است که p .

ترکیب دوشروطی دو گزاره p ، q گزاره $p \Leftrightarrow q$ است که بنا به تعریف درست است هرگاه p و q با هم درست یا با هم نادرست باشند و در غیر این صورت نادرست می‌باشد. گزاره دوشروطی $p \Leftrightarrow q$ اگر همیشه درست باشد به صورتهای زیر بیان می‌شود.

- اگر p آنگاه q و بالعکس.
- p اگر و فقط اگر q یا q اگر و فقط اگر p .
- p شرط لازم و کافی است برای q .
- q شرط لازم و کافی است برای p .

عکس ترکیب شرطی: اگر در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ جای p و q را عوض کنیم، گزاره شرطی $q \Rightarrow p$ به دست می‌آید، که آن را عکس گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ می‌خوانند درستی یا نادرستی $q \Rightarrow p$ به درستی یا نادرستی $p \Rightarrow q$ بستگی ندارد.

عکس نقیض ترکیب شرطی: از گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، گزاره شرطی $\sim q \Rightarrow \sim p$ به دست می‌آید که آن را عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ می‌نامند که ارزش آن با ارزش $p \Rightarrow q$ یکسان می‌باشد.

دو ترکیبهای بالا، هر يك از گزاره‌های p یا q را مؤلفه (یا همنه) ترکیب می‌خوانند و در گزاره شرطی p را مقدم و q را تالی می‌نامند.

چند مثال

- ۱- گزاره «اگر a عددی فرد باشد، آن گاه a^2 عددی است فرد»، يك گزاره شرطی است. عکس و عکس نقیض این گزاره به ترتیب عبارتند از «اگر a^2 عددی فرد باشد، آنگاه a عددی است فرد» و «اگر a^2 عددی فرد نباشد، آنگاه a فرد نیست».
- ۲- گزاره «اگر $a = b$ ، آنگاه $a' = b'$ »، يك گزاره شرطی است. عکس و عکس نقیض این گزاره به ترتیب عبارتند از «اگر $a' = b'$ ، آنگاه $a = b$ » و «اگر $a' \neq b'$ ، آنگاه $a \neq b$ ».
- ۳- گزاره «اگر $a < b$ ، آنگاه $-a < -b$ » و اگر $-b < -a$ ، آنگاه $a < b$ »، يك گزاره دوشروطی است.

گزاره‌های همیشه درست

به گزاره زیر توجه کنید :

«دوم بهمن ۱۳۸۰ یا روز جمعه است یا نیست» (۱)

درستی این جمله بستگی به درستی مؤلفه‌های (همنه‌های) آن ندارد. بدین معنا که خواه روز دوم بهمن ۱۳۸۰ جمعه باشد خواه نباشد، گزاره فوق درست است. تعریف - گزاره مرکب Q يك گزاره همیشه درست است هرگاه ارزش آن، مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش، همیشه درست باشد. روشن است که اگر Q همیشه درست باشد $\sim Q$ همیشه نادرست است.

گزاره‌هائی نظیر (۱) که در حالت کلی به صورت $p \vee \sim p$ نوشته می‌شود مثالی از يك گزاره همیشه درست است و گزاره $p \wedge \sim p$ مثالی از گزاره همیشه نادرست است. (دوم بهمن ۱۳۸۰ روز جمعه است و نیست).

از مطالب گفته شده نتیجه می‌شود که :

- اگر هر يك از گزاره‌های P یا Q همیشه درست باشد، آنگاه $P \vee Q$ همیشه درست است همچنین $P \vee Q \vee \dots \vee R$ گزاره همیشه درست است هرگاه اقلا یکی از همنه‌های آن همیشه درست باشد.
- اگر گزاره‌های P و Q با هم همیشه درست باشند، آنگاه $P \wedge Q$ گزاره همیشه درست است و برعکس.

- اگر $P \wedge Q$ همیشه درست باشد، آنگاه $P \vee Q$ گزاره همیشه درست است.

- اگر P و Q گزاره‌های همیشه درست باشند، آنگاه $P \Rightarrow Q$ و $P \Leftrightarrow Q$ نیز گزاره‌های همیشه درست است.

- اگر P گزاره همیشه نادرست باشد، آنگاه $P \Rightarrow Q$ گزاره همیشه درست است.

- گزاره همیشه درست را با T و گزاره همیشه نادرست را با F نمایش می‌دهیم.

تعریف - در یک شاخه ریاضی، قضیه گزاره‌ای است که از اصول آن شاخه ریاضی نتیجه شده و درستی آن با برهان بیان می‌شود. می‌توان ثابت کرد یک قضیه، گزاره همیشه درست است.

قضایای شرطی و دوشرطی

هرگاه x و y اعداد حقیقی باشند، ارزش گزاره « اگر $x > y$ ، آنگاه $2x > 2y$ » بستگی به متغیرهای x و y نداشته و گزاره همیشه درست است. زیرا، تنها موردی که ارزش این گزاره نادرست است وقتی است که $x > y$ ولی $2x \not> 2y$. اما در جبر خوانده‌ایم اگر نامساوی $x > y$ برقرار باشد آنگاه بنا بر خاصیت نامساویها، $2x > 2y$ نیز برقرار است. عبارت دیگر در گزاره شرطی « $x > y \Rightarrow 2x > 2y$ » اگر مقدم درست باشد می‌توان با استفاده از ویژگی‌های نامساویها، درستی تالی را نتیجه گرفت. این گزاره شرطی یک استلزام منطقی یا یک قضیه است.

تعریف - یک استلزام منطقی یک گزاره شرطی همیشه درست است.

از تعریف نتیجه می‌شود که یک استلزام یک گزاره شرطی است ولی یک گزاره شرطی لزوم ندارد که یک استلزام باشد.

قضایای ریاضی بیشتر به صورت استلزام منطقی بیان شده بنام قضایای شرطی خوانده می‌شوند.

- اگر دو زاویه قائمه باشند، آنگاه متساویند.

- اگر دو مثلث متساوی باشند، آنگاه مشابهند.

- اگر یک عدد طبیعی به صورت $(n-1)(n-2)$ باشد، آنگاه این عدد بر ۶ بخش پذیر است.

- اگر $x < y$ ، آنگاه $-x > -y$.

- اگر $A \subset B$ ، آنگاه $A \cap B = A$.

تعریف - اگر عکس یک استلزام منطقی خود استلزام منطقی باشد (در حالت کلی نیست)، آنگاه آن استلزام منطقی یک قضیه دوشرطی خوانده می‌شود.

۱- $x > y \Rightarrow 2x > 2y$ گزاره نمایش د گزاره سوری همیشه درست است که در اینجا از

نوشتن نماد سور خودداری شده است

دو مثال آخر از مثالهای بالا ، دارای این ویژگی است . یعنی قضایای دوشرطی میباشند .
 این قضایا معمولا به صورت شرط لازم و کافی بیان می شوند .
 - شرط لازم و کافی برای آنکه در مثلث قائم الزامی طول يك ضلع برابر نصف طول وتر باشد ، آنست که اندازه زاویه روبروی به آن ضلع 90° باشد .
 - شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه ای داخل دایره باشد ، آنست که فاصله آن تا مرکز دایره از شعاع کوچکتر باشد .
 - هرگاه $U \subset V$ ، شرط لازم و کافی برای آنکه U زیر فضای V باشد ، آنست که U نسبت به عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد . ($U \neq \emptyset$)
 - در حالت کلی اگر $P \Leftrightarrow Q$ ، قضیه دوشرطی باشد ، گوئیم شرط لازم و کافی برای Q آنست که P .

دو ترکیب منطقی هم ارز (معادل یا تساوی منطقی)

دو ترکیب منطقی P و Q را هم ارز خوانند هرگاه همواره ارزشهای یکسان داشته باشند ، عبارت دیگر ، P و Q هم ارزند هرگاه ، اگر یکی درست باشد دیگری نیز درست باشد و اگر یکی نادرست باشد دیگری هم نادرست باشد . دو گزاره هم ارز P و Q را به صورت $P \equiv Q$ نشان می دهند . اگر P و Q هم ارز نباشند می نویسیم : $P \not\equiv Q$.
 بدیهی است که اگر P و Q هم ارز باشند آنگاه $P \Leftrightarrow Q$ يك گزاره همیشه درست است . عبارت دیگر ، هر قضیه دوشرطی از دو گزاره هم ارز تشکیل شده است . مثلا :
 - $A \subset B$ ، هم ارز با $A \cap B' = \emptyset$ می باشد .
 - $\neg x = \neg y$ ، هم ارز با $x = y$ می باشد .
 - در فضای برداری ، $r \vee = \bar{0}$ هم ارز است با $r = 0$ یا $r = \bar{0}$ ، عدد r و \vee بردار است .

از این مطالب نتیجه می شود که :

- هر هم ارزی يك قضیه دوشرطی است .
- هر هم ارزی يك گزاره دوشرطی است ولی هر گزاره دوشرطی هم ارزی نیست .
- اگر P و Q گزاره های همیشه درست یا هر دو همیشه نادرست باشند داریم $P \equiv Q$.
- از $P \equiv Q$ نتیجه می شود $\sim P \equiv \sim Q$.
- رابطه \equiv يك رابطه هم ارزی است .

هم ارزی منطقی در حقیقت يك نوع تساوی منطقی بین گزاره های مرکب است . بسیار اتفاق می افتد که هم ارزی يك ترکیب منطقی از خود آن ساده تر و درك آن آسانتر است . بنابراین

شناختن ترکیبهای منطقی هم‌ارز در استدلال بسیار سودمند است. ما در زیر چند تعریف و چند قضیه را می‌آوریم:

نقیض نقیض - با تشکیل جدول درستی p و $(\sim p)$ دیده می‌شود که این دو گزاره هم‌ارزند:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

یعنی، نقیض نقیض یک گزاره با خود گزاره هم‌ارز است.

ترکیب هم‌ارز با گزاره شرطی - با تشکیل جدول درستی $p \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow \sim q$ و $p \vee \sim p$ دیده می‌شود که این دو گزاره هم‌ارزند، یعنی: هر گزاره شرطی هم‌ارز است با ترکیب فصلی تالی و نقیض مقدم آن.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (q \vee \sim p)$$

ترکیب هم‌ارز گزاره دو شرطی - با تشکیل جدولهای درستی $p \Leftrightarrow q$ و $p \Leftrightarrow \sim q$ و $(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$ دیده می‌شود که این دو گزاره هم‌ارزند.

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$$

همچنین داریم:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

که همان بیان قوانین جابجایی، شرکت پذیری \vee و بخششی \wedge است.

بعضی از هم‌ارزیها تحت عنوان قضیه ذکر می‌شوند:

قضیه ۱ - هر گزاره شرطی هم‌ارز است با عکس نقیض خودش، یعنی:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

برهان - در بالا دیدیم که:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (q \vee \sim p) \quad (1)$$

$$(\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (\sim p \vee \sim(\sim q))$$

در نتیجه:

$$\equiv (\sim p \vee q)$$

$$(\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (q \vee \sim p) \quad (2)$$

با مقایسه (۱) و (۲) و توجه به خاصیت‌های جابجایی و تبدیلی تساوی منطقی نتیجه می‌شود.

$$(p \Rightarrow q) \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

مثال - ثابت کنید برای هر x متعلق به مجموعه اعداد درست داریم:

اگر x^2 فرد باشد، آنگاه x فرد است.

بجای اثبات درستی گزاره فوق ، درستی عکس نقیض آنرا ثابت می کنیم . اگر x فرد نباشد ، آنگاه x^2 فرد نیست برای این منظور ، گوییم اگر x فرد نباشد ، پس زوج است یعنی : $x = 2k$ و یا $x^2 = 2k^2$ و یا $x^2 = 2(2k^2)$ و این تساوی مبین این است که x^2 فرد نیست .

قضیه ۲- قانون دمورگان ، برای هر دو گزاره p و q داریم :

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad \text{الف -}$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad \text{ب -}$$

برهان - اثبات درستی الف و ب نظیر هم بوده ، در اینجا فقط الف را ثابت می کنیم . اگر p و q درست باشد ، آنگاه طبق تعریف گزاره عطفی ، $p \wedge q$ درست بوده در نتیجه نقیض آن یعنی $\sim(p \wedge q)$ نادرست می باشد. اما اگر p و q درست باشد ، آنگاه طبق تعریف نقیض ، $\sim p$ و $\sim q$ نادرست بوده و ترکیب فصلی آنها یعنی $\sim p \vee \sim q$ نیز نادرست است در نتیجه دو ترکیب منطقی $\sim(p \wedge q)$ و $\sim p \vee \sim q$ هم ارزش هستند. برای حالات دیگر p و q نیز ، هم ارزش بودن دو ترکیب فوق به همین ترتیب ثابت می شود و هم ارزی الف درست است. مثال ۱- می دانیم که اگر عدد حقیقی a ، بزرگتر یا مساوی ۱ نباشد حتماً کوچکتر از آنست . این مطلب به زبان ریاضی چنین اثبات می شود :

$$(a \geq 1) \equiv (a > 1 \vee a = 1)$$

و نقیض آن می شود :

$$\sim(a \geq 1) \equiv \sim(a > 1 \vee a = 1)$$

$$\equiv \sim(a > 1) \wedge \sim(a = 1)$$

$$\equiv (a \not> 1 \wedge a \neq 1)$$

$$a \not> 1 \equiv a < 1$$

مثال ۲- گزاره « چنین نیست که a عددی است کوچکتر از ۲ و بزرگتر از ۲ » هم ارز است با گزاره « چنین نیست که a عددی است کوچکتر از ۲ یا چنین نیست که a عددی است بزرگتر از ۲ » یا به زبان ساده تر « a کوچکتر از ۲ نیست یا a بزرگتر از ۲ نیست » و با زبان منطق داریم :

$$(2 < a < 2) \equiv (2 < a \wedge a < 2)$$

و نقیض آن چنین است :

$$\sim(2 < a < 2) \equiv \sim(2 < a \wedge a < 2)$$

$$\equiv \sim(2 < a) \vee \sim(a < 2)$$

نقیضه دمورگان :

$$\equiv (2 \not< a) \vee (a \not< 2)$$

$$\equiv (2 \geq a \vee a \geq 2)$$

قضیه ۳- نقیض هر گزاره شرطی هم‌ارز است با ترکیب عطفی مقدم و نقیض تالی آن ،

$$\sim(p \Rightarrow q) = (p \wedge \sim q)$$

یعنی :

برهان - داریم :

$$p \Rightarrow q \equiv (q \vee \sim p)$$

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(q \vee \sim p)$$

$$\equiv \sim q \wedge \sim(\sim p)$$

$$\equiv p \wedge \sim q$$

مثال - نقیض گزاره شرطی « اگر n فرد باشد ، آنگاه $n + 1$ زوج است » عبارتست از

گزاره « n فرد است و $n + 1$ زوج نیست » .

قضیه ۴- هر گزاره دو شرطی هم‌ارز است با عکس نقیض خودش ، یعنی :

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$$

برهان - ساده و بهمه دانش‌آموزان است .

مثال - گزاره « شرط لازم و کافی برای آنکه $a = 2$ ، آنستکه $a = 6$ » هم‌ارز است

با گزاره « شرط لازم و کافی برای آنکه $a \neq 2$ ، آنستکه $a \neq 6$ » .

قضیه ۵- هرگاه p و q دو گزاره باشند: $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim q \Leftrightarrow p = q \Leftrightarrow \sim p$

. ثبات بهمه دانش‌آموزان است.

مثال - نقیض گزاره دو شرطی « شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای روی عمود منصف

یک پایه خط باشد آن است که از دو سر پایه خط بیک فاصله باشد » هم‌ارز است با « شرط

لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای روی عمود منصف یک پایه خط نباشد آن است که از دو سر پایه

خط بیک فاصله باشد ».

قضیه ۶- هر گزاره شرطی که تالی آن خود شرطی باشد هم‌ارز است با گزاره

شرطی که مقدم آن ترکیب عطفی مقدم گزاره اصلی و مقدم گزاره تالی بوده و تالی آن

تالی گزاره تالی باشد .

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \equiv ((p \wedge q) \Rightarrow r)$$

یعنی :

برهان - از طرف چپ شروع می‌کنیم :

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \equiv ((q \Rightarrow r) \vee \sim p)$$

ترکیب هم‌ارز ترکیب شرطی :

$$\equiv ((r \vee \sim q) \vee \sim p)$$

ترکیب هم‌ارز ترکیب شرطی :

$$\equiv (r \vee \sim(p \wedge q))$$

شرکت پذیری و دموگان :

$$\equiv (p \wedge q \Rightarrow r)$$

مثال - گزاره « اگر ABC مثلث باشد ، آنگاه اگر AM میانه باشد ، آنگاه فاصله

دو رأس B و C تا AM مساوی است « هم‌ارزاست با گزاره « اگر ABC مثلث باشد و AM میانه باشد ، آنگاه فاصله دو رأس B و C تا AM مساوی است » . که معمولاً در کتابهای هندسه به صورت‌های زیر بیان می‌شود :

« اگر در مثلث ABC ، خط AM میانه باشد ، آنگاه فاصله دو رأس دیگر تا AM مساوی است » .

« در هر مثلث ABC ، اگر AM میانه باشد ، آنگاه فاصله دو رأس دیگر تا AM مساوی است » .

نتیجه ۱- در گزاره شرطی $P \Rightarrow Q$ هرگاه P همیشه نادرست باشد ، $P \Rightarrow Q$ يك استلزام منطقی است زیرا ، در هم‌ارزی $P \Rightarrow Q \equiv Q \vee \sim P$ داریم $\sim P$ همیشه درست است و در نتیجه $Q \vee \sim P$ همیشه درست خواهد بود یعنی از يك مقدم نادرست هر نتیجه‌ای را می‌توان گرفت . مثلاً در مجموعه اعداد طبیعی ، اگر $x = 2x$ ، آنگاه x اول است .

چون مقدم این گزاره برای x نادرست است ، این گزاره همیشه درست بوده و يك قضیه ریاضی است . این روش استدلال را اثبات به افتقار مقدم یا اثبات به نقی «قدم می‌خوانند .

نتیجه ۲- اگر P و Q دو گزاره باشد ، آنگاه $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ يك استلزام منطقی است ، یعنی از Q همیشه $P \Rightarrow Q$ نتیجه می‌شود . چرا ؟

تمرین

۱- گزاره‌های زیر را بصورت شرط لازم یا شرط کافی بنویسید :

الف - در يك مستطیل طول دو قطر با هم برابرند .

ب - طول دو قطر دوزنقه متساوی الساقین با هم برابرند .

ج - يك مثلث که در آن يك ارتفاع و يك نیمساز بر هم منطبق باشند متساوی الساقین است .

۲- نفیض هر يك از گزاره‌های تمرین ۱ را که به صورت شرطی نوشته‌اید ، به دست آورید .

۳- بجای « ... ، در جمله‌های زیر الفاظ شرط لازم ، شرط کافی یا شرط لازم و کافی را کنار ببرید . تا گزاره‌های درست بدست آید .

الف - ... برای آنکه يك چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد ، آنسکه هر دو زاویه روبرو برابر باشند .

ب - ... برای آنکه $ac > bc$ ، آنسکه $a > b$ و $c > 0$.

ج - $x^2 - 1 = 0$ ، ... ، برای $x + 1 = 0$.

د - ... ، برای آنکه $\sin x = \sin y$ ، آنسکه $x = y$.

۲- گزاره‌های صفحه بعد را فقط با استفاده از نماد \Rightarrow بنویسید .

$$\text{الف} - (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$$

$$\text{ب} - (p \vee \sim q) \wedge (q \vee p)$$

$$\text{ج} - \sim [(p \wedge q) \vee \sim p]$$

۵- با استفاده از خاصیت جابجایی « \vee » و مطالب خوانده شده خاصیت جابجایی « \wedge » را در مجموعه گزاره‌ها ثابت کنید

۶- با استفاده از خاصیت پخش « \vee » نسبت به « \wedge » و مطالب خوانده شده پخش بودن « \wedge » را نسبت به « \vee » در مجموعه گزاره‌ها ثابت کنید.

۷- با استفاده از شرکت‌پذیری « \vee » و مطالب خوانده شده شرکت‌پذیری « \wedge » را در مجموعه گزاره‌ها ثابت کنید.

۸- ثابت کنید گزاره‌های زیر استلزام منطقی هستند:

$$\text{الف} - p \Rightarrow p \quad \text{ب} - p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)]$$

$$\text{ب} - p \Rightarrow p \vee p \quad \text{و} - [(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

$$\text{ج} - r \Rightarrow r \vee p \quad \text{ز} - [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

$$\text{د} - r \wedge q \Rightarrow r \quad \text{ح} - [(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

۹- ثابت کنید گزاره‌های زیر همیشه نادرستند:

$$\text{الف} - p \wedge \sim (p \vee q) \quad \text{ب} - (p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$$

$$\text{ج} - p \wedge [\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \quad \text{د} - \sim [p \wedge q \Rightarrow p \vee q]$$

۱۰- ثابت کنید گزاره‌های زیر قضایای دوطرفه هستند:

$$\text{الف} - [p \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow p \quad \text{ج} - [(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow q$$

$$\text{ب} - [p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p \quad \text{د} - [\sim (p \Rightarrow q) \vee p] \Leftrightarrow p$$

۱۱- ترکیبهای عطفی، فصلی، دوطرفه را فقط با استفاده از نمادهای \sim و \Rightarrow بنویسید.

۱۲- ترکیبهای عطفی، شرطی و دوطرفه را فقط با استفاده از نمادهای \sim و \vee بنویسید.

$$۱۳ - p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

سورها

به گزاره‌های زیر توجه کنید:

- در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارود بر وتر نصف وتر است.

$$\text{برای هر قوس } x, \text{ داریم: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

- هر بیضی آتش‌نشانی شجاع است.

$$\text{برای هر دو عدد حقیقی } x \text{ و } y \text{ داریم: } (x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

— برای هر دو مجموعه A و B داریم : $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$

همه این گزاره‌ها، بالفاظ «هر» بیان شده‌اند و خاصیتی را به تمام عضوهای مجموعه مرجع مورد بحث (عالم سخن) نسبت داده‌اند. درحقیقت تمام اتحادهای ریاضی از همین نوعند. این گزاره‌ها را گزاره‌های سور کلی می‌خوانند و برای نمایش آنها، همانطور که در سال اول دیدید، از نماد « \forall » که بهام سور عمومی خوانده می‌شود استفاده می‌کنند :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : x' \geq x$$

این گزاره‌ها را در حالت کلی وقتی مجموعه مرجع معلوم باشد به صورت $\forall x (P(x))$ نمایش می‌دهند و می‌خوانند هر x در P خاصیت P است یا برای تمام x ها خاصیت P برقرار است. برای تمام x ها خاصیت P درست است.

اما گزاره‌هایی وجود دارند که خاصیتی را به یک یا چند عضو از مجموعه مرجع مورد بحث (عالم سخن) نسبت می‌دهند :

— بعضی از اعداد اول زوج است.

— بعضی از قضایای هندسی دوشرطی است.

— بعضی از اعداد فرد اولند.

— بعضی مثلثها متساوی الساقین است.

— بعضی از دانش آموزان باهوشند.

— بعضی از اعداد طبیعی مجذور کاملند.

اولین گزاره بیان می‌کند که دست کم یک عدد در مجموعه اعداد اول وجود دارد که زوج است (در اینجا فقط یک عدد وجود دارد). اما سومین گزاره بیان می‌کند که عدد یا اعدادی در مجموعه اعداد فرد وجود دارند که اول هستند و جوابها بشمارند.

اگر P ، E و F ترتیب مجموعه اعداد اول، مجموعه اعداد زوج و مجموعه اعداد فرد باشند این دو گروه بصورت‌های زیر نوشته میشوند :

$$\exists x (x \in P \wedge x \in E)$$

$$\exists x (x \in F \wedge x \in P)$$

این گزاره‌ها را در حالت کلی، وقتی که مرجع معلوم باشد به صورت $\exists x, P(x)$ نمایش می‌دهند و می‌خوانند بعضی از x های مرجع دارای خاصیت P است. نماد « \exists » را سور وجودی و گزاره $\exists x, P(x)$ را گزاره سور وجودی می‌نامند.

گاهی ترکیبی از سورهای عمومی و وجودی، در ریاضیات، مورد استفاده قرار می‌گیرد، مثلاً در مجموعه اعداد حقیقی داریم :

- برای هر x اقلا يك y وجود دارد به قسمتي كه x مساوي y نیست ، يعني :

$$\forall x, \exists y, x \neq y \quad (\text{گزاره درست})$$

- اقلا يك x براي هر y وجود دارد به قسمتي كه x مساوي y نیست ، يعني :

$$\exists x, \forall y, x \neq y \quad (\text{گزاره نادرست})$$

- براي هر a و هر b حاصلضرب a در b برابر است با حاصلضرب b در a ، يعني^۱ :

$$\forall a, \forall b, ab = ba \quad (\text{گزاره درست})$$

در بعضي موارد، از جمله اتحادهاي رياضي ، از گذاشتن نماد سوري خودداري مي کنند.

مثلا در مجموعه اعداد حقيقي داريم :

$$ab = ba$$

$$a + b = b + a$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\sin yx = y \sin x \cos x$$

در اينگونه موارد از لفظ «همواره» استفاده مي نمايند .

تقيض گزاره هاي سوري

۱- تقيض سوره و هي : تقيض گزاره «تمام اعداد اول مرده ستند» عبارتست از «چنين نيت كه تمام اعداد اول فرد هستند» .

كه مفهوم آن اين است كه اقلا يك عدد اول وجود دارد كه فرد نيست
اگر دامنه متغير x مجموعه اعداد اول باشد ، مطلب فوق با زبان رياضي چنين نوشته مي شود :

$$\sim (\forall x \in P, x \text{ فرد است}) \equiv (\exists x \in P, x \text{ فرد نيست})$$

همچنين تقيض گزاره :

$$«\text{براي تمام مقادير } x \text{ متعلق به مجموعه اعداد طبيعي , } x < x^2»$$

مباوتست از :

«چنين نيت كه براي تمام مقادير x متعلق به مجموعه اعداد طبيعي $x < x^2$ » يعني، اقلا يك عدد طبيعي وجود دارد كه خودش از مربعش كوچكتر نيست. اگر دامنه متغير x ، مجموعه اعداد طبيعي باشد ، اين مطلب به زبان رياضي چنين نوشته مي شود :

$$\sim (\forall x, x < x^2) \equiv (\exists x, \sim (x < x^2))$$

۱- مي توان بجاي $\forall a \forall b (ab = ba)$ عبارت $b(ab - ba)$ و $a(ba - ab)$ را نوشت

$$\equiv \exists x, x \not\leq x'$$

$$\equiv \exists x, x \geq x'$$

نقیض گزاره «هر انسانی فناپذیر است» عبارتست:

«چنین نیست که هر انسانی فناپذیر است»

یعنی، اثلاً يك انسان وجود دارد که فناپذیر نیست. اگر دامنه متغیر x مجموعه انسانها

باشد، عبارت ریاضی بحث فوق چنین است:

$$\sim (\forall x \in M, x \text{ فناپذیر است}) \equiv (\exists x \in M, x \text{ فناپذیر نیست})$$

به طور کلی اگر A مجموعه مفروض و $P(x)$ گزاره نمای تعریف شده روی A باشد،

در مورد نقیض سور عمومی دستور زیر را داریم:

$$\sim (\forall x, P(x)) \equiv \exists x, \sim P(x)$$

که خوانده می شود، «نقیض گزاره «هر x دارای خاصیت P است» هم ارز است با گزاره « x وجود دارد که دارای خاصیت P نیست».

۲- نقیض سور وجودی: اگر دامنه متغیر x مجموعه اعداد طبیعی باشد نقیض گزاره «برای

بعضی مقادیر x ($x \leq x'$) عبارتست از:

«چنین نیست که برای بعضی مقادیر x ، متعلق به مجموعه اعداد طبیعی $x \leq x'$ ».

همی، برای تمام مقادیر x متعلق به مجموعه اعداد طبیعی، چنین نیست که $x \leq x'$.

این مطلب را با زبان ریاضی چنین می نویسیم:

$$\sim (\exists x, x \leq x') \equiv (\forall x, \sim (x \leq x'))$$

$$\equiv (\forall x, x \not\leq x')$$

در حاشیه کلی، اگر گزاره نمای $P(x)$ روی مجموعه A تعریف شده باشد، نقیض گزاره

سور وجودی از دستور زیر به دست می آید:

$$\sim (\exists x \in A, P(x)) \equiv (\forall x \in A, \sim P(x)) \quad (۱)$$

و می خوانند، «نقیض گزاره «بعضی مقادیر x از A دارای خاصیت P است» هم ارز است با گزاره

«هر x از A دارای خاصیت P نیست».

گاهی هم ارزی (۱) را به صورت زیر می نویسند:

$$(\forall x \in A, \sim P(x)) \equiv (\nexists x \in A, P(x)) \quad (۲)$$

یعنی گزاره «هر x از A دارای خاصیت P نیست» هم ارز است با گزاره «هیچ x از A

وجود ندارد که دارای خاصیت P باشد».

چند مثال

۱- گزاره «چنین نیست که در هر کلاس دانش آموزان دوس می خوانند» هم ارز است با گزاره «کلاسی وجود دارد که در آن دانش آموزی درس نمی خواند».

۲- نقیض گزاره «بعضی از اعداد اول زوجند» عبارتست از «تمام اعداد اول زوج نیستند یا هیچ عدد اولی وجود ندارد که زوج باشد».

$$\sim(\forall x, (x > 1)) \equiv \exists x, x \nless 1 \quad -3$$

۴- «هیچ عدد زوج بزرگتر از ۲ وجود ندارد که اول باشد» هم ارز است با «هر عدد زوج بزرگتر از ۲، اول نیست».

نقیض گزاره‌هایی که پیشوندهای \forall و \exists را با هم دارند - به مثالهای زیر توجه کنید :

$$[\sim(\forall x \forall y, (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2)] \equiv \quad \text{الف -}$$

$$\exists x, \sim[(\forall y(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2)] \equiv$$

$$\exists x \exists y, \sim[(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2] \equiv \exists x \exists y, (x+y)^2 \neq x^2 + 2xy + y^2$$

$$\sim(\forall x \exists y, x+y > 5) \equiv \exists x \forall y, \sim(x+y > 5) \equiv \exists x \forall y, x+y \leq 5 \quad \text{ب -}$$

ج- گزاره «چنین نیست که در هر کلاس شاگردی وجود دارد که فوتبال بازی می کند» هم ارز است با گزاره «کلاسی وجود دارد که تمام شاگردان آن فوتبال بازی نمی کند».

د- گزاره «چنین نیست که هر کسی بعضی از کشورهای اسلامی را دیده است» هم ارز است با گزاره «بعضی افراد هستند که همه کشورهای اسلامی را ندیده اند».

بمطور کلی، اگر A و B دو مجموعه‌ای باشند و گزاره نمای $P(x, y)$ روی آنها تعریف شده باشد، نقیض این نوع گزاره‌ها از دستورهای زیر بدست می آید :

$$\sim(\forall x, \forall y, P(x, y)) \equiv (\exists x, \exists y, \sim P(x, y)) \quad \text{الف -}$$

$$\sim(\forall x, \exists y, P(x, y)) \equiv (\exists x, \forall y, \sim P(x, y)) \quad \text{ب -}$$

$$\sim(\exists x, \forall y, P(x, y)) \equiv (\forall x, \exists y, \sim P(x, y)) \quad \text{ج -}$$

$$\sim(\exists x, \exists y, P(x, y)) \equiv (\forall x, \forall y, \sim P(x, y)) \quad \text{د -}$$

مثال ۱- گزاره «چنین نیست که شهری وجود دارد که در آن شهر مدرسه‌ای وجود دارد که دو آن مدرسه بعضی از معلمان مرتبند» هم ارز است با گزاره «در همه شهرها و در همه مدرسه‌ها همه معلمان مرتب نیستند».

مثال ۲- گزاره «چنین نیست که تمام دانش آموزان رشته ریاضی و فیزیک تمام مدارس تهران باهوشند» هم ارز است با گزاره «بعضی از دانش آموزان رشته ریاضی و فیزیک بعضی از مدارس تهران باهوش نیستند».

مثال نقض - ممکن است این سؤال به ذهن یک دانش آموز برسد که هرگاه A مجموعه اعداد اول و B مجموعه اعداد فرد باشد آیا $A \subset B$ یک گزاره همیشه درست است . یعنی یک قضیه ریاضی است یا خیر ؟ همچنین به ذهن این دانش آموز بر حسب تصادف عدد ۲ می رسد که اول هست بعضی متعلق به A است ولی فرد نیست یعنی متعلق به B نیست . همین مثال برای رد $A \subset B$ کافی است. در اینجا عدد ۲ را مثال با جواب نقض می خوانند. (بطلور کلی برای اثبات نادرستی گزاره $\forall x P(x)$ درستی نقض این گزاره یعنی $\exists x \sim P(x)$ را ثابت می کنیم. در این صورت عضوی مانند ۱ پیدا می کنیم که $P(1)$ درست نباشد.) نادرستی بسیاری از گزاره هایی که قضیه نیستند با مثال نقض بیان می کنیم .

تمرین

- ۱- برای هر گزاره نما سوری بکار ببرید که آن گزاره نما را به گزاره درست تبدیل کند.
(دامنه متغیرها را مجموعه اعداد حقیقی فرض کنید) .

$$\sin t + \cos t = \cos t \quad \text{الف -}$$

$$(x+2)(x-2) = x^2 - 4 \quad \text{ب -}$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \quad \text{ج -}$$

$$|x-y| \geq |x| - |y| \quad \text{د -}$$

$$x+2 < 1 \quad \text{ه -}$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{و -}$$

$$|xy| = |x| \cdot |y| \quad \text{ز -}$$

- ۲- نفی گزاره های سوری زیر را پیدا کنید و آنها را بدون بکار بردن حروف به فارسی روان بیان کنید .

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{الف -}$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \quad \text{ب -}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a > b \Rightarrow a^2 > b^2 \quad \text{ج -}$$

$$\text{۳- طرف دیگر هم ارزش به او بنویسید: } (\forall x, \sim P(x)) \equiv \dots \quad \text{الف -}$$

$$\sim (\exists x, P(x)) \equiv \dots \quad \text{ب -}$$

$$\sim (\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv \dots \quad \text{ج -}$$

$$\sim (\exists x, \sim P(x)) \equiv \dots \quad \text{د -}$$

۲- ارزش دوستی گزاردهای زیر را تعیین کنید:

الف - $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$

ب - $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$

ج - $\exists x \forall y, x \neq y$

د - $\exists x, \nexists y, x \neq y$

استنتاج

فرض کنید در بالای در ورودی يك استخر شنا آگهی کرده باشند که :

(۱) « اگر هوا بارانی است ، آنگاه استخر تعطیل است »

(۲) همچنین فرض کنید که واقعاً « هوا بارانی باشد »

در اینصورت از گزاره‌های درست (۱) و (۲) گزاره دوست زیر نتیجه می‌شود :

(۳) « استخر تعطیل است »

حال گزاره‌های درست زیر را در نظر بگیرید :

« اگر فردا جمعه باشد ، آنگاه مدرسه تعطیل است »

« فردا مدرسه تعطیل است »

آیا از گزاره‌های درست فوق می‌توان نتیجه گرفت :

« فردا جمعه است »

جواب مسلماً منفی است. زیرا ممکن است فردا یکی از جشنهای اسلامی بوده و مدرسه تعطیل باشد.

هر کدام از بحثهای فوق يك استنتاج است .

استنتاج بمفهوم نتیجه‌گیری است بدین معنا که از گزاره‌های مفروضی با استفاده از

دستورهای معینی که بنام قوانین خواننده می‌شوند گزاره دیگری را نتیجه می‌گیریم .

در بحث فوق ، آیا از گزاره‌های (۱) و (۳) می‌توان گزاره « هوا بارانی است » را نتیجه

گرفت ؟ در این قسمت ما می‌خواهیم روشن سازیم که چه موقع از مفروضات درستی می‌توان نتیجه درست

گرفت و چه موقع نمی‌توان ، برای این منظور از تعاریف و قضایای موجود در این زمینه استفاده می‌کنیم.

قرارداد - هرگاه از گزاره‌های مفروض P_1, P_2, \dots, P_n گزاره Q نتیجه شده باشد

می‌نویسیم :

$P_1 \text{ و } P_2 \text{ و } \dots \text{ و } P_n \mid \text{---} Q$

تعریف - استنتاج ، $P_1 \text{ و } P_2 \text{ و } \dots \text{ و } P_n \mid \text{---} Q$ معتبر است اگر و فقط اگر گزاره

زیر يك گزاره همیشه درست باشد .

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow Q$

گزاره‌های P_1, P_2, \dots, P_n را مقدمات استنتاج خوانده و آنها را درست فرض می‌نمایند و Q را نتیجه استنتاج می‌خوانند. اساس استنتاج بر قضایای بحث‌شده در این قسمت استوار است.

قضیه - اگر p و $p \Rightarrow q$ دو گزاره درست باشند، آنگاه q نیز درست است.

پرهان - فرض کنیم q يك گزاره درست نباشد، در این صورت ارزش q نادرست است چون طبق فرض، p درست است بنا به تعریف گزاره شرطی ارزش $p \Rightarrow q$ نادرست است و این خلاف فرض است، زیرا $p \Rightarrow q$ درست فرض شده است. بنابراین q درست خواهد بود.

این قضیه بنام قانون انتزاع خوانده شده آنرا به صورتهای زیر بیان می‌کنند:

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ گزاره همیشه درست است؛

$p \Rightarrow q$ و $p \mid \text{---} q$ یا از $p \Rightarrow q$ و p نتیجه می‌شود q ؛

$p \Rightarrow q \&$

$\frac{p}{p \Rightarrow q \&}$ یا از $p \Rightarrow q$ و p نتیجه می‌شود q ؛

$\therefore q$

در مثال استخر، اگر گزاره‌های «هوا بارانی است» و «استخر تعطیل است» را به ترتیب

با p و q نمایش دهیم در این صورت دستور شرطی مربوط به مثال بالا، به شکل زیر نوشته می‌شود:

$p \Rightarrow q$

که یکی از مفروضات استنتاج بوده و فرض دیگر، درست بودن گزاره p ، یعنی «هوا بارانی است» می‌باشد.

بنابراین، استنتاج بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$p \Rightarrow q \&$

$\frac{p}{p \Rightarrow q \&}$

$\therefore q$

(۱)

که قانون انتزاع بوده و معتبر است.

نتیجه ۱- با توجه به اینکه هر گزاره شرطی هم‌ارز عکس نقیض خودش است ما می‌توانیم

در (۱) بجای $p \Rightarrow q$ عکس نقیض آنرا قرار دهیم در نتیجه قانون انتزاع به صورت زیر نوشته می‌شود:

$\sim q \Rightarrow \sim p \&$

$p \Rightarrow q \&$

$\frac{\sim q}{\sim q \Rightarrow \sim p \&}$

$\frac{\sim q}{p \Rightarrow q \&}$

$\therefore \sim p$

$\therefore \sim p$

\Rightarrow یا

(۲)

۱- Law of detachment

در حقیقت ما گزاره همیشه درست $[(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ با

$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ را داریم که خود يك استلزام منطقی است. چرا؟ لذا (۲) بنام قانون نقیض انتزاع خوانده می شود. از این قانون نیز در استنتاج استفاده می شود.

نتیجه ۲- با توجه باینکه $(p \Rightarrow q) \equiv q \vee \sim p$ در (۱) می توان بجای گزاره شرطی گزاره هم ارز آن را قرارداد در نتیجه قانون انتزاع به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$q \vee \sim p \&$$

$$\underline{p}$$

(۳)

$$\therefore q$$

در حقیقت ما گزاره همیشه درست $[(q \vee \sim p) \wedge p] \Rightarrow q$ را داریم که خود يك استلزام منطقی است.

معمولا (۳) را قانون رفع مؤلفه می خوانند. از این قانون نیز در بیان معتبر بودن يك استنتاج استفاده می شود. صورت دیگر این قانون چنین است:

$$p \vee q \&$$

$$\underline{\sim p}$$

$$\therefore q$$

یعنی از ترکیب فصلی دو گزاره و نقیض یکی از آنها، گزاره دیگر آن ترکیب اصلی نتیجه می شود.

چند مثال

۱- آیا استنتاج زیر معتبر است؟ می دانیم که:

- حسن در دریاست یا حسن غرق نمی شود

- حسن در دریا نیست

\therefore حسن غرق نمی شود

اگر گزاره های «حسن در دریاست» و «حسن غرق می شود» را به ترتیب با p و q نشان

$$p \vee \sim q \&$$

دهیم، استنتاج فوق به صورت زیر نوشته می شود:

$$\underline{\sim p}$$

$$\therefore \sim q$$

که یکی، ز صورتهای قانون رفع مؤلفه است و درست است.

۲- آیا استنتاج زیر معتبر است؟ می دانیم که:

- اگر هوا بارانی باشد یا کسی به مجلس جشن نیاید، جشن باشکست مواجه خواهد شد.

- جشن باشکست مواجه نشد.

\therefore هوا بارانی نبوده است.

گزاره‌های «هوا بارانی است» ، «کسی به مجلس جشن می‌آید» و «جشن باشکست مزاجه می‌شود» را به ترتیب با p ، q و r نمایش دهیم خواهیم داشت :

$$p \vee \sim q \Rightarrow r \quad (1)$$

$$\frac{\sim r}{\therefore \sim p}$$

طبق تعریف استنتاج ، مقدمات درست است بنابراین ، از (1) نتیجه می‌شود :

$$\sim r \Rightarrow \sim p \wedge q$$

پس استنتاج فوق به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\sim r \Rightarrow \sim p \wedge q \&$$

$$\sim r$$

$$\hline \therefore \sim p \wedge q$$

که قانون انتزاع بوده و معتبر است و از آنجا $\sim p$ درست است یعنی هوا بارانی نبوده است.
۳- آیا استنتاج زیر معتبر است ؟ می‌دانیم که :

$$p \vee q \Rightarrow \sim(r \wedge \sim p) \&$$

$$p$$

$$\hline \therefore \sim r \vee p$$

این استنتاج با توجه به قوانین دموورگان و درستی p به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$p \vee q \Rightarrow \sim r \vee p \&$$

$$p \vee q$$

$$\hline \therefore \sim r \vee p$$

که قانون التزاع بوده و درست است .

دستور دیگر استنتاج از روی قضیه زیر به دست می‌آید .

قضیه - برای هر سه گزاره p ، q و r ، اگر گزاره‌های $q \Rightarrow r$ و $p \Rightarrow r$ درست باشد

آنگاه $p \Rightarrow r$ نیز درست است.

پروهان - اثبات به روش برهان خلف است . یعنی گوئیم اگر $p \Rightarrow r$ درست باشد که قضیه

ثابت است . اگر نادرست باشد ، آنگاه گزاره $\sim p \vee \sim r$ نادرست خواهد بود چرا ؟ و از آنجا طبق

تعریف ترکیب فصلی باید r و $\sim p$ نادرست باشد در نتیجه p درست است . اما در فرض نیز

داریم $p \Rightarrow q$ درست است . پس طبق قضیه انتزاع q درست است . اما q درست و $\sim r$ نادرست

است در نتیجه $q \Rightarrow r$ نادرست خواهد بود چرا ؟ و حال آنکه داریم $q \Rightarrow r$ درست و این خلاف

فرض می‌باشد. بنابراین، $p \Rightarrow r$ درست است.

قضیه فوق بنام قانون قیاس خوانده شده آنرا به صورتهای زیر نمایش می‌دهد:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \text{ \& } \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array} \quad \text{یا} \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \vdash p \Rightarrow r$$

مثال ۱- آیا استنتاج زیر معتبر است؟ می‌دانیم که:

- اگر x حشره است آنگاه x هشت پا ندارد.

- اگر x عنکبوت است آنگاه x هشت پا دارد.

∴ - اگر x عنکبوت است آنگاه x حشره نیست.

هرگاه گزاره‌های « x حشره است»، « x هشت پا دارد» و « x يك عنکبوت است» را

به ترتیب با r, q, p نشان دهیم استنتاج فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow \sim q \text{ \& } \\ r \Rightarrow q \\ \hline \therefore r \Rightarrow \sim p \end{array}$$

که با توجه به قضیه عکس قیاس هم‌ارز است با:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow \sim q \text{ \& } \\ \sim q \Rightarrow \sim r \\ \hline \therefore p \Rightarrow \sim r \equiv (r \Rightarrow \sim p) \end{array}$$

و این قانون قیاس است در نتیجه استنتاج معتبر است.

هر یک از گزاره‌های زیر همیشه درست بوده در نتیجه استنتاج از روی آنها معتبر است.

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow p \vee q & \text{الف -} \\ p \wedge q \Rightarrow p \text{ یا } p \wedge q \Rightarrow q & \text{ب -} \\ [(p \leftrightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \text{ یا } [(p \leftrightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p & \text{ج -} \end{array}$$

بخصوص گزاره (الف) بنام قانون ادخال فاصل و (ب) بنام قانون حذف عاطف معروف است.

از آنها زیاد استفاده می‌شود. مثلاً اگر فرض کنیم گزاره «بیژن ماهوش است» درست باشد آنگاه

گزاره «بیژن ماهوش است یا سامان نخست‌وزیر است» نیز درست است.

یا گزاره زیر نیز درست است:

$$x > 1 \Rightarrow (x > 1) \vee (x = 1)$$

دومورد گزاره ب، فرض کنیم گزاره «خط Δ برخط D_1 و خط Δ برخط D_2 عمود است» درست باشد در این صورت روشن است که هر یک از گزاره های «خط Δ برخط D_1 عمود است» و «خط Δ برخط D_2 عمود است» درست هستند.

استنتاج زیر طبق ج درست است.

$$\begin{array}{l} A \subset B - \\ A \cap B' = \emptyset \text{ اگر و تنها اگر } \\ \hline A \cap B' = \emptyset \therefore \end{array}$$

تمرین

۱- آیا استنتاجهای زیر معتبر است؟ (فانویی را که در هر تمرین بکار می برید نام نبرده)

الف - می دانیم که:

- اگر عدد طبیعی a فقط دو مقسوم علیه مثبت متمایز داشته باشد، آنگاه a اول است.

- عدد طبیعی a فقط دو مقسوم علیه مثبت متمایز دارد.

\therefore عدد طبیعی a اول است.

ب - می دانیم که:

- اگر $A \subset B$ ، آنگاه $B' \subset A'$

$B' \not\subset A'$ -

$A \not\subset B \therefore$

۲- کدام يك از هم ارزیهای زیر درست است؟

الف - $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$

ب - $p \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$

ج - $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

د - $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

ه - $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

و - $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

۳- اگر فرض کنیم $\frac{p \& q}{\therefore r}$ درست باشد آیا می توان نتیجه گرفت که $\frac{p \& r}{\therefore q}$ درست است؟

(فرض کنیم مفروضات استنتاج زیر بتوانند نادرست باشد)

۲- آیا استنتاج‌های زیر معتبر است ؟ $r \Rightarrow q$ & $\sim p \Rightarrow q$ &

$\frac{\sim p \Rightarrow q \text{ \& } \sim q}{\therefore p}$	$\frac{q \Rightarrow \sim p}{\therefore p \Rightarrow \sim r}$	$\frac{p \vee q \quad r \Rightarrow \sim p \quad \sim r \Rightarrow s \quad \sim q}{\therefore s}$
$\frac{p \Rightarrow \sim q \text{ \& } \sim q \Rightarrow \sim r}{\therefore r \Rightarrow p}$	$\frac{p \Rightarrow q \text{ \& } q \Rightarrow \sim r}{\therefore \sim r \vee \sim p}$	$\frac{p \wedge q \text{ \& } \sim r \Rightarrow \sim p}{\therefore r \wedge q}$
$\frac{p \Rightarrow q \text{ \& } \sim q \vee r}{\therefore r \vee \sim p}$	$\frac{r \Rightarrow q \text{ \& } r}{\therefore \sim p}$	

۵- ثابت کنید :

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \text{ \& } q) \vdash (p \Rightarrow r)$$

۶- ثابت کنید :

$$(p \Rightarrow q) \vdash (r \vee p) \Rightarrow (r \vee q)$$

۷- با استفاده از تمرین ۶ ثابت کنید :

$$(p \Rightarrow q) \vdash [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$$

۸- ثابت کنید :

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \vdash (p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$$

۹- ثابت کنید :

$$((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge ((p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r) \vdash p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$$

۱۰- آیا استنتاج زیر معتبر است؟

$$\frac{\sim r \Rightarrow \sim p \text{ \& } p}{\therefore (p \vee q) \wedge (r \vee s)}$$

۱۱- آیا گزاره زیر همیشه درست است؟

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$$

حلقه و میدان

مثال ۱- دستگاه $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ، یعنی مجموعه عددهای صحیح نسبی (درست) را با دو عمل جمع و ضرب معمولی. در نظر بگیرید. این دستگاه دارای خواص زیر است:

- ۱- دستگاه $(\mathbb{Z}, +)$ یک گروه آبدی است.
- ۲- مجموعه \mathbb{Z} نسبت به عمل \times بسته است.
- ۳- عمل \times در \mathbb{Z} شرکت پذیر است.
- ۴- عمل \times نسبت به $+$ از طرف چپ و راست توزیع پذیر است.

مثال ۲- دستگاه $(\mathbb{Q}, +, \times)$ ، مجموعه اعداد گویا را با دو عمل جمع و ضرب معمولی را در نظر بگیرید، این دستگاه دارای خواص زیر است:

- ۱- دستگاه $(\mathbb{Q}, +)$ یک گروه آبدی است.
- ۲- مجموعه \mathbb{Q} نسبت به عمل \times بسته است.
- ۳- عمل \times در \mathbb{Q} شرکت پذیر است.
- ۴- عمل \times نسبت به $+$ از طرف چپ و راست توزیع پذیر است.

مثال ۳- مجموعه اعداد زوج درست یعنی E را با دو عمل جمع و ضرب معمولی در نظر بگیرید، این دستگاه دارای خواص زیر است:

- ۱- دستگاه $(E, +)$ یک گروه آبدی است.
- ۲- مجموعه E نسبت به عمل \times بسته است.
- ۳- عمل \times در E شرکت پذیر است.
- ۴- عمل \times نسبت به $+$ از طرف چپ و راست توزیع پذیر است.

هر يك از دستگاههای بالا، مثالی از يك دستگاه ریاضی است که بنام حلقه خوانده می شود.

تعریف = مجموعه ناتمامی R را همراه با دو عمل دو تایی $+$ و \times (یا \cdot) که آنها را به ترتیب جمع و ضرب می نامیم، یک حلقه گوئیم هرگاه داشته باشیم:

- ۱- $(R, +)$ یک گروه آبدی باشد.
- ۲- مجموعه R نسبت به عمل \times بسته باشد.

۳- عمل \times در R شرکت پذیر باشد. یعنی برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم:

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

۴- عمل \times نسبت به $+$ از دو طرف توزیع پذیر باشد؛ یعنی برای هر $a, b, c \in R$ داریم:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

این دستگاه را به $(R, +, \times)$ و گاهی برای سادگی به R نشان می‌دهیم.

ملاحظات جمع و ضرب صرفاً قراردادی و بخاطر راحتی است و؛ ظور این نیست که حتماً

R مجموعه اعداد است و یا عملهای $+$ و \times همان جمع و ضرب معمولی هستند. بلکه ممکن

است R مجموعه ماتریسها، مجموعه مجموعه‌ها،... بوده و اعمال جمع و ضرب تعریف شده روی

آنها شباهتی با جمع و ضرب معمولی اعداد داشته باشد.

چند مثال:

۱- هر يك از مجموعه $M_{2 \times 2}$ ، یعنی مجموعه‌های ماتریسهای 2×2 و 3×3 یا

عملهای جمع و ضرب ماتریسها يك حلقه است. زیرا در اصول مربوط به حلقه صدق می‌کند.

۲- مجموعه ماتریسهای 2×2 بفرم $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ با دو عمل جمع و ضرب ماتریسها

يك حلقه است.

ویژگیهای ابتدایی در حلقه $(R, +, \times)$

می‌توان ثابت کرد:

الف- برای هر x در R داریم:

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

ب- برای هر x و y در R داریم:

$$(-x)y = x(-y) = -xy$$

ج- برای هر x و y در R داریم:

$$(-x)(-y) = xy$$

ناکون صحیحی از عضو بی اثر عمل ضرب و همچنین تعویض پذیری عمل ضرب، اگرده ایم،

حلقه با این ویژگیها دارای نامهای خاصی است که ما آنها را بررسی می‌کنیم:

حلقه يك دار-حلقه $(R, +, \times)$ را يك حلقه يك دار (یا با عضو يكانی) نامید هرگاه عمل ضرب

در آن دارای عضوی بی اثر باشد، این عضو بی اثر را به 1 نشان داده آن را عضو واحد دستگاه می‌نامیم.

چند مثال:

۱- مجموعه ماتریسهای 2×2 با عمل جمع و ضرب ماتریسها يك حلقه يك دار است زیرا

و 1 در 2×2 عضو بی اثر $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ نسبت به ضرب است.

۲- حلقه $(Z, +, \times)$ نیز يك حلقه يك‌دار است.

۳- حلقه $(\mathbb{I}, +, \times)$ که در $\mathbb{E}n$ مجموعه عد صحیح نسبی زوج است يك‌دار نیست.

حلقه تعویض پذیر- حلقه $(R, +, \times)$ را يك حلقه تعویض پذیر نامیم هرگاه عمل \times در آن تعویض پذیر باشد. بمبادت دیگر، $\forall a, b \in R, ab = ba$ (برای سهولت ab را بجای $a \times b$ نوشته ایم).

حلقه $(\mathbb{I}, +, \times)$ يك حلقه تعویض پذیر است. ولی حلقه $(M_{2 \times 2}, +, \times)$ ، که در آن $M_{2 \times 2}$ مجموعه ماتریسهای 2×2 است تعویض پذیر نیست. زیرا ضرب ماتریسها خاصیت تعویض پذیری ندارد.

میدان- حلقه $(R, +, \cdot)$ را يك میدان نامند هرگاه R تعویض پذیر و يك‌دار باشد و هر عضو مخالف صفر آن نیز معکابل ضربی داشته باشد.

دستگاههای $(Q, +, \times)$ و $(R, +, \times)$ میدان هستند. ولی $(Z, +, \times)$ و $(M_{2 \times 2}, +, \times)$ میدان نیستند. زیرا در Z هر عضو دارای معکابل ضربی نیست و در $M_{2 \times 2}$

هر عضو معکوس (معکابل ضربی) ندارد مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مقسوم علیه صفر- در حلقه $(R, +, \times)$ عضو $a \neq 0$ را يك مقسوم علیه صفر نامیم هرگاه عضوی مانند $b \neq 0$ در R یافت شود به گونه‌ای که $a \times b = 0$ ، یراحتی می‌توان دید $\mathbb{I}R$ مقسوم علیه صفر ندارد، زیرا، هرگاه $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

مثال: در $(M_{2 \times 2}, +, \times)$ عضو $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ يك مقسوم علیه صفر است، زیرا

عضو $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$ که مخالف صفر است وجود دارد به آسانی که

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حوزه درست- حلقه $(R, +, \times)$ را يك حوزه درست نامیم هرگاه، اولاً تعویض پذیر باشد. ثانیاً مقسوم علیه صفر نداشته باشد.

تنبیه شرط لازم و کافی برای اینکه حلقه تعویض پذیر R يك حوزه درست باشد، آنستکه برای هر a, b, c در R ، داشته باشیم: $a \neq 0 \wedge (ab = ac) \Rightarrow b = c$ (قانون حذف).
برهان- فرض کنیم قانون حذف در R برقرار است باید ثابت کنیم R يك حوزه درست است هرگاه $ab = 0$ باید نشان دهیم $a = 0$ یا $b = 0$. اگر $a = 0$ حکم ثابت است.

فرض کنیم $a \neq 0$ نشان می‌دهیم $b = 0$ ، برای این منظور گوئیم بنابر ویژگی الف، $a \cdot 0 = 0$ و بفرض $ab = 0$ داریم:

$$a \neq 0 \text{ و وجود قانون حذف: } ab = 0 \Rightarrow ab = a \cdot 0 \Rightarrow b = 0$$

بالعکس - فرض کنیم R يك حوزه درست باشد، ثابت می‌کنیم قانون حذف در آن برقرار است، هرگاه $ab = ac$ و $a \neq 0$ ، چنین داریم:

$$ab = ac \wedge a \neq 0 \Rightarrow ab - ac = 0 \wedge a \neq 0$$

$$\Rightarrow a(b - c) = 0 \wedge a \neq 0 \quad \text{توزیع پذیری:}$$

$$\Rightarrow (a = 0 \vee (b - c) = 0) \wedge a \neq 0 \quad \text{چون } R \text{ حوزه درست است:}$$

$$\Rightarrow b - c = 0 \quad \text{قانون رفع مؤلفه:}$$

$$\Rightarrow b = c$$

نتیجه ۱ - قضیه بالا نشان می‌دهد که درحلقه معمولی پذیره قاعده حذف معادل است با فرض نداشتن مقسوم علیه صفر.

نتیجه ۲ - بواحی دیده می‌شود که قانون حذف در میدان برقرار است بنابراین هر میدان يك حوزه درست است ولی عکس آن صحیح نیست.

مثال - $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حوزه درست است ولی میدان نیست.

زیرحلقه و ایدآل در حلقه

در حلقه‌ها همه زیر مجموعه‌ها مورد توجه نیستند. بلکه زیر مجموعه‌های ویژه‌ای مورد توجه هستند که نقش آنها در تئوری حلقه‌ها مهم است.

این زیر مجموعه‌ها را به نسبت اهمیتشان در زیر معرفی و ویژگی آنها را در حلقه‌های درست (صحیح و نسبی) بررسی می‌کنیم.

تعریف - فرض کنیم $(R, +, \cdot)$ يك حلقه باشد، زیر مجموعه ناتهی S از R را يك زیرحلقه گویند اگر S با همان دو عمل $+$ و \cdot تشکیل يك حلقه دهد:

مثال ۱ - $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ زیرحلقه $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ است.

مثال ۲ - $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ زیرحلقه $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ است.

قضیه - هرگاه $S \subseteq R$ مخالف \emptyset باشد شرط لازم و کافی برای آنکه $(S, +, \cdot)$ يك

زیرحلقه $(R, +, \cdot)$ باشد آن است که:

الف - برای هر $a, b \in S$ $a - b \in S$ (زیر گروه بودن S را تأمین می‌کند).

ب - برای هر $a \in S$ و $b \in R$ $ab \in S$.

تعریف - فرض کنیم $(R, +, \times)$ يك حلقه باشد زیر مجموعه I از R را يك ایدآل دوطرفه در R نامیم هرگاه :

الف : I با عمل جمع زیر گروه R باشد (برای هر a و b در I ، $a - b \in I$)

ب : برای هر $i \in I$ و هر $r \in R$ داشته باشیم $ri \in I$ و $ir \in I$

آیا هر ایدآل دو طرفه يك زیرحلقه است ؟ عكس آن چطور؟
چند مثال :

۱ - مجموعه \mathbb{Z} ، یعنی مجموعه تمام عددهای صحیح نسبی (درست) زوج يك ایدآل حلقه \mathbb{Z} است.

زیرا، الف: تفاضل هر دو عدد زوج عددی است زوج. ب: حاصلضرب هر عدد صحیح نسبی در یک عدد زوج عددی است زوج.

۲- برای هر $m \in \mathbb{N}$ ، $m\mathbb{Z}$ يك ایدآل حلقه \mathbb{Z} است. (به دلیل تعریف)

۳- در هر حلقه R ، زیر مجموعه‌های $\{0\}$ و R هر کدام يك ایدآل R هستند چرا؟ (این ایدآلها را ایدآلهای بدیهی می‌نامیم).

۴ - در چند جمله‌ایها، $P(x)$ ، اگر I مجموعه تمام چند جمله‌هایی باشد که مقدار ثابت آنها صفر است، آنگاه I يك ایدآل $P(x)$ است.

۵- اگر W مجموعه تمام چند جمله‌هایی باشد که مقدار ثابت آنها زوج است، آنگاه W يك ایدآل در $P(x)$ است.

به طوری که در بند ۲، دیدیم مجموعه مضارب عدد درست يك ایدآل \mathbb{Z} است ثابت می‌شود که هر ایدآل \mathbb{Z} به این صورت است، یعنی تنها ایدآلهای \mathbb{Z} همانهایی هستند که از مضارب يك عدد به دست می‌آیند. با هر ایدآل حلقه عددهای درست به صورت $m\mathbb{Z}$ است. ایدآل به دست آمده از عدد m را به (m) نشان می‌دهیم.

تمرین

۱- کدام يك از مجموعه‌های زیر همراه با اعمال جمع و ضرب اعداد تشکیل يك حلقه

می‌دهد؟

$$\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

الف -

$$\{5x \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

ب -

۱- از اثبات صرف نظر می‌شود.

$$\left\{ \frac{m}{r} \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \quad -ج$$

$$\left\{ \frac{m}{r^n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\} \quad -د$$

۲- ثابت کنید برای $k \in \mathbb{N}$ که k مربع کامل نباشد، مجموعه زیر همراه با جمع و ضرب معمولی تشکیل یک حوزه درست می‌دهد.

$$\mathbb{Z}/\sqrt{k} = \{a + b/\sqrt{k} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

۳- ثابت کنید برای $k \in \mathbb{N}$ که k مربع کامل نباشد، مجموعه زیر همراه با جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان می‌دهد.

$$\mathbb{Q}/\sqrt{k} = \{a + b/\sqrt{k} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

۴- دو عمل $*$ و \circ روی \mathbb{R} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{الف} \begin{cases} a * b = a + b + 1 \\ a \circ b = a + b + ab \end{cases} \quad \text{ب} \begin{cases} a * b = a + b - 1 \\ a \circ b = a + b - ab \end{cases}$$

آیا $(\mathbb{R}, *, \circ)$ یک حلقه است؟

۵- مجموعه $P = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ که در آن $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$

مفروض است آیا (P, \circ) یک گروه است؟ عمل \circ عمل ترکیب توابع است.

۶- مجموعه زوجهای اعداد حقیقی با دو عمل $+$ و \times را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

ثابت کنید دستگاه حاصل یک میدان است.

۷- هرگاه R حلقه تعویض پذیر و $a \in R$ ، آنگاه

$$aR = \{ar \mid r \in R\}$$

یک ایده آل در R است.

۸- اگر $U = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ که در آن a و b دو عدد صحیح معین است ثابت

کنید $(U, +, \times)$ یک ایده آل در \mathbb{Z} است. (جمع و ضرب معمولی است)

۹- اگر U و V دو ایده آل حلقه R باشند ثابت کنید

$$U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

نیز یک ایده آل R است.

۱۰- هرگاه U یک ایده آل در R باشد و $1 \in U$ ، ثابت کنید $U = R$.

۱۱- ثابت کنید تنها ایده آلهای میدان F ، خود F یا $\{0\}$ است.

نظریه اعداد

در این فصل خواص اعداد صحیح $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ را بررسی می‌کنیم. برای مطالعه این خواص نیاز به تعاریف زیر داریم:

مجموعه مرتب - مجموعه A همراه با رابطه ترتیب \mathbb{R} ، بنام مجموعه مرتب خوانده شده و آن را به صورت (A, \mathbb{R}) نمایش می‌دهند.

عضو ابتدا و انتهای يك مجموعه

رابطه « \leq » روی مجموعه اعداد صحیح، يك رابطه ترتیب است و بوسیله آن می‌توان اعداد صحیح را بدشکل زیر مرتب نمود:

$$\dots \leq -(n+1) \leq -n \leq \dots \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots \leq n \leq n+1 \leq \dots$$

در نتیجه (Z, \leq) يك مجموعه مرتب نامیده میشود. به همین ترتیب مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد صحیح منفی هم باراضه \leq ، تشکیل مجموعه‌های مرتب می‌دهند.

$$(N, \leq): 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$$

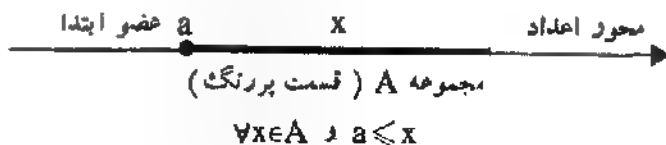
$$(-N, \leq): \dots, -(n+1), -n, \dots, -3, -2, -1$$

در مجموعه اعداد طبیعی، هیچ عضوی قبل از ۱ نیست و با ۱ مقدم بر همه عضوهای N می‌باشد. (۱ عضو ابتدای N است.)

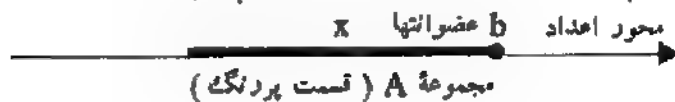
در مجموعه $-N$ ، هیچ عضوی بعد از (-1) نیست و با -1 مؤخر بر همه اعضای $-N$ می‌باشد. (-1) عضو انتهای مجموعه اعداد صحیح منفی است. (۱ عضو ابتدا را کوچکترین عضو و عضو انتها را بزرگترین عضو نیز می‌نامند.

در N عضو انتها و در $-N$ عضو ابتدا وجود ندارد.

تعریف ۱ - فرض کنید (A, \leq) يك مجموعه مرتب باشد. عضو $a \in A$ را عضو ابتدای مجموعه A می‌نامیم، هرگاه برای هر x در A داشته باشیم $a \leq x$.



تعریف ۲ - فرض کنید (A, \leq) يك مجموعه مرتب باشد، عضو $b \in A$ را عضو انته‌ای مجموعه A می‌نامیم هرگاه برای هر x در A داشته باشیم $x \leq b$.



$$\forall x \in A \text{ و } x \leq b$$

ثابت می‌شود که عضوهای ابتدا و انتها، در يك مجموعه، اگر وجود داشته باشد، منحصر بفرد است.
چند مثال:

۱- مجموعه $A = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ و } 0 \leq x < 1\}$ ، با رابطه « \leq » دارای عضو ابتدایی باشد ولی عضو انتها ندارد.

۲- مجموعه $B = \{y: y \in \mathbb{R}, 0 < y \leq 1\}$ ، با رابطه « \leq » دارای عضو انتها می‌باشد ولی عضو ابتدا ندارد.

۳- مجموعه $C = \{z: z \in \mathbb{R}, 0 < z < 1\}$ با رابطه « \leq » عضو ابتدا ندارد و عضو انتها هم ندارد.

خوشترتیمی

یکی از خواص اساسی مجموعه اعداد طبیعی با رابطه « \leq » این است که هر زیر مجموعه غیر تهی آن دارای عضو ابتدا می‌باشد. مجموعه مرتب (\mathbb{N}, \leq) با این ویژگی بنام يك مجموعه خوشترب خوانده می‌شود.

اصل خوش ترتیبی - هر زیر مجموعه غیر تهی از مجموعه اعداد طبیعی دارای عضو ابتدایی می‌باشد.

بطور کلی

تعریف - مجموعه مرتب (A, \leq) را يك مجموعه خوشترتیب نامند، هرگاه هر زیر مجموعه غیر تهی آن دارای عضو ابتدا باشد.

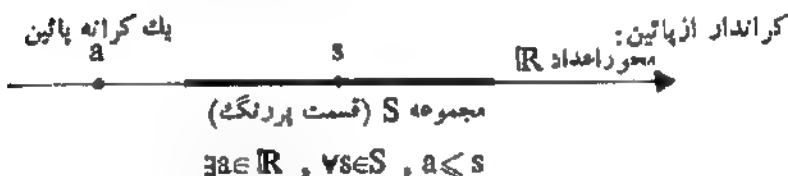
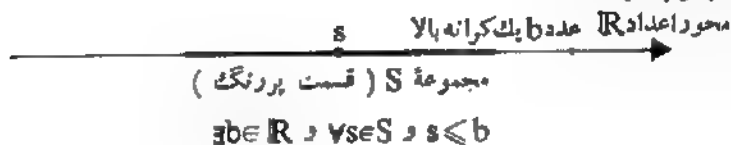
مجموعه مرتب (\mathbb{R}, \leq) خوشترتیب نیست، زیرا مجموعه $B = \{z: z \in \mathbb{R} \text{ و } 0 < z \leq 1\}$ عضو ابتدا ندارد.

در اینجا با استفاده از اصل خوش ترتیبی اعداد طبیعی قضایای را ثابت می‌کنیم که در بیان مطالب دیگر بن فصل مورد استفاده قرار میگیرند. برای این منظور تعاریف زیر را جهت یادآوری مطرح می‌نمایم.

تعریف - مجموعه $S \subseteq \mathbb{R}$ را کراندا از بالا گوئیم هرگاه عددی مانند $b \in \mathbb{R}$ یافت شود به گونه‌ای که برای هر $s \in S$ داشته باشیم $s \leq b$ عدد b را يك کرانه بالا برای مجموعه S می‌نامیم. همچنین

مجموعه S را کسراننداز از پائین گوئیم هرگاه عددی مانند $a \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $s \in S$ داشته باشیم $a \leq s$ ، عدد a را يك کرانه پائین برای مجموعه S می نامیم.

کراندار از بالا :



قضیه هر مجموعه غیر تهی کراندار از پائین از اعداد صحیح دارای عضو ابتدا می باشد.
 برهان - فرض کنیم S زیر مجموعه غیر تهی \mathbb{Z} و a يك کرانه پائین برای S باشد، در اینصورت بنا بر تعریف کرانه پائین، برای هر s متعلق به S داریم :

$s \geq a$ ، با توجه به اینکه بحث ما در \mathbb{Z} است، لذا بلافاصله نتیجه می شود $s > a - 1$ و با $0 < s - (a - 1)$ ، یعنی $s - (a - 1)$ مثبت و عدد طبیعی است، حال مجموعه T از این اعداد یعنی $\{s \in S \mid s - (a - 1) = t\}$ را در نظر می گیریم. T زیر مجموعه غیر تهی از اعداد طبیعی است. (چرا؟) لذا بر اساس اصل خوش ترتیبی دارای عضو ابتدا است. اگر t_0 عضو ابتدای T باشد، بنا بر تعریف عضو ابتدا برای هر $t \in T$ داریم $t_0 \leq t$. حال بجای t و t_0 طبق تعریف مجموعه T مقدارشان را قرار می دهیم:

$$s_0 - (a - 1) \leq s - (a - 1)$$

و یا پس از حذف $(a - 1)$ از طرفین: $s_0 \leq s$ ، یعنی وجود دارد $s_0 \in S$ که برای هر $s \in S$ همواره $s_0 \leq s$ است، لذا s_0 عضو ابتدا S است.

قضیه هر مجموعه غیر تهی کراندار از بالای اعداد صحیح دارای عضو انتها می باشد.
 برای اثبات این قضیه مجموعه $K = \{a + 1 - s : s \in S\}$ را وقتی که a يك کرانه بالایی برای آن مجموعه باشد، در نظر بگیرید.

استقراء ریاضی

بسیاری از خواص اعداد طبیعی ناشی از اصل خوش ترتیبی اعداد طبیعی است که در مهمترین آنها استقراء ریاضی می باشد که ما بپذیرفتن اصل خوش ترتیبی آنرا ثابت می کنیم.

قضیه استقراء ریاضی^۱ (اصل استقراء ریاضی)

هر زیر مجموعه از اعداد طبیعی که ۱ متعلق به آن بوده و تالی^۲ هر عضوش نیز عضو همان زیر-مجموعه باشد، با مجموعه اعداد طبیعی مساوی است یا به بیان دیگر اگر S زیر مجموعه \mathbb{N} بوده و دارای خواص زیر باشد:

الف - $1 \in S$

ب - برای هر $n \in S$ اگر $n \in S$ آنگاه $n+1 \in S$ باشد.

آنگاه $S = \mathbb{N}$ است.

برهان - تمام اعداد طبیعی که متعلق به S نیستند مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند که آن را S' می‌نامیم؛ ثابت می‌کنیم $S' = \emptyset$ ، فرض می‌کنیم $S' \neq \emptyset$ (برهان خلف) چون $S' \subset \mathbb{N}$ ، در اینصورت بنابر اصل خوش ترتیبی اعداد طبیعی، S' عضو ابتدا دارد، فرض می‌کنیم n_0 عضو ابتدای S' باشد؛ چون طبق فرض «الف» $1 \in S$ است، پس با توجه به تعریف S' ، $1 \notin S'$ ، در نتیجه عضو ابتدا یعنی n_0 بزرگتر از ۱ است ($n_0 > 1$) و عدد طبیعی $n_0 - 1$ چون از n_0 عضو ابتدای S' کوچکتر است متعلق به S' نیست پس متعلق به S است. از اینرو طبق فرض «ب»، تالی $n_0 - 1$ یعنی n_0 نیز متعلق به S است در صورتیکه n_0 عضو ابتدای S' و متعلق به S' می‌باشد و این متناقض با تعریف S' است. پس $S' = \emptyset$ است، در نتیجه $\mathbb{N} = S$ است.

نتیجه قضیه استقراء ریاضی

قضیه استقراء ریاضی روشی بسیار مهم و توانا برای اثبات قضایا و احکام ریاضی درست می‌دهد که در تمام شاخه‌های ریاضی از آن استفاده میشود روش مزبور چنین است:

قضیه - فرض می‌کنیم $P(n)$ یک گزاره تعریف شده در مجموعه اعداد طبیعی باشد و در شرایط زیر صدق کند:

الف) $P(1)$ درست باشد.

ب) اگر $P(k)$ درست باشد آنگاه $P(k+1)$ نیز درست باشد؛

در اینصورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست است.

برهان - زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی که عضوهای آن گزاره نمای $P(n)$ را به گزاره درست تبدیل می‌کند (مجموعه جواب گزاره نمای $P(n)$) $S(P(n))$ می‌نامیم. یعنی:

$$S = \{n | n \in \mathbb{N} \text{ و } P(n) \text{ درست است}\}$$

۱ - بعضی از کتابهای نظریه اعداد استقراء ریاضی بعنوان اصل پذیرفته و اصل خوش ترتیبی را بعنوان نتیجه ثابت می‌کنند.

۲ - اگر n عددی طبیعی باشد $n+1$ تالی آن نامیده میشود.

بنابر فرض «الف» P_1 درست است پس $1 \in S$ و بنابر «ب» اگر P_k درست باشد یعنی $k \in S$ ، آنگاه P_{k+1} نیز درست است پس $1 \in S$ در نتیجه بنابر قضیه استقراء ریاضی $S = \mathbb{N}$ است یعنی P_n بازاا هر عدد طبیعی n درست است.

مثال ۱- نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n ، تساوی زیر درست است.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$$

حل: فرض کنیم P_n گزاره‌نمای بالا باشد. یعنی:

$$P_n: 1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$$

اگر در P_n بجای n عدد ۱ را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$1 = 1(1+1)/2$$

از اینجا نتیجه می‌شود که P_1 درست است. یعنی شرط الف از قضیه استقراء ریاضی برقرار است.

اگر فرض کنیم P_k درست باشد (k یک عدد طبیعی دلخواه است) خواهیم داشت:

$$P_k: 1 + 2 + 3 + \dots + k = k(k+1)/2 \quad (\text{فرض استقراء})$$

حال باید نشان دهیم که P_{k+1} نیز درست است یعنی باید نشان دهیم که:

$$P_{k+1}: 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = (k+1)(k+2)/2 \quad (\text{حکم استقراء})$$

ما بنابر فرض استقراء می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= (1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k+1) \\ &= k(k+1)/2 + (k+1) \\ &= (k+1)(k+2)/2 \end{aligned}$$

یعنی P_{k+1} نیز درست است. بنابر این شرط ب از قضیه استقراء ریاضی نیز برقرار است پس بنابر قضیه استقراء ریاضی برای هر عدد طبیعی n ، P_n درست است.

مثال ۲- نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n ، نامساوی $2^n \geq 1+n$ درست است.

حل: فرض کنیم P_n گزاره‌نمای بالا باشد یعنی:

$$P_n: 2^n \geq 1+n$$

اگر در P_n بجای n عدد ۱ را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$2^1 \geq 1+1$$

از اینجا نتیجه می‌شود که P_1 درست است.

اگر فرض کنیم P_k درست باشد، خواهیم داشت:

$$P_k: 2^k \geq 1+k \quad (\text{فرض استقراء})$$

حال نشان می‌دهیم که P_{k+1} نیز درست است یعنی نشان می‌دهیم که:

.. $P_{k+1}: 2^{k+1} \geq 1 + (k+1) = 2 + k$ (حکم استقراء)
اما بنابر فرض استقراء می‌توان نوشت:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2(1+k) > 2+k$$

یعنی P_{k+1} نیز درست است بنابراین شرط ب از قضیه استقراء ریاضی نیز برقرار است.
پس بنابر قضیه استقراء ریاضی برای هر عدد طبیعی n ، P_n درست است.
توجه - گاهی اوقات در مسائل استقراء بجای شروع $1 \in S$ ، ممکن است با $2 \in S$ ، یا $3 \in S$ شروع شود.

مثال - ثابت کنید گزاره نمای $P(n): 2n+1 < 2^n$ بازاء $n \geq 3$ درست است.

حل - گزاره $P(n)$ برای $n=3$ درست است زیرا $2 \times 3 + 1 < 2^3$ است باید ثابت کنیم اگر $2^k + 1 < 2^{k+1}$ باشد آنگاه $2^{k+1} + 1 < 2^{k+2}$ نیز درست است. برای این منظور به طرفین نامساوی $2^k + 1 < 2^{k+1}$ عدد ۲ را اضافه می‌کنیم، خواهیم داشت $2^k + 3 < 2^{k+1} + 2$ (۱) حال ثابت می‌کنیم $2^{k+1} + 2 < 2^{k+2}$ است. نامساوی (۲) پس از ساده شدن بصورت $2 < 2^k$ در می‌آید که برای $n \geq 3$ همواره برقرار است. بنابراین با توجه به خواص نامساویها، از (۱) و (۲) نتیجه میشود $2^k + 3 < 2^{k+1} + 2$ و یا $P(n)$ بازاء جمیع مقادیر $n \geq 3$ درست است.

تمرین

۱- با استفاده از قضیه استقراء ریاضی ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، داریم:

$$1+2+3+\dots+(2n-1)=n^2 \quad \text{الف -}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{ب -}$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \text{ج -}$$

$$1.3+2.5+3.7+\dots+n(2n+1)=\frac{2n^3+4n^2+5n}{6} \quad \text{د -}$$

$$1+2+3+\dots+n < \frac{1}{2}(2n+1)^2 \quad \text{ه -}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{n^2}$$

۲- با استفاده از قضیه استقراء ریاضی ثابت کنید:

$$\text{الف - } (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\text{ب - } \log x^n = n \log x$$

۳ - با کمک استقراء ثابت کنید :

الف - $n^2 < 2^n, n \geq 2$ ب - $n^2 < 2^n, n \geq 2$

ج - $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{n}{2}, n \geq 2$ د - $2^n < n!, n \geq 2$

۴ - با کمک استقراء ثابت کنید :

الف - تعداد اقطار هر n ضلعی محدب برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$

ب - مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(n-2)180^\circ$

۵ - هرگاه n عدد طبیعی و a و b مثبت باشند ثابت کنید : $a \leq b \Rightarrow a^n \leq b^n$

۶ - هرگاه f تابع حقیقی بوده و $f_1 = f$ و $f_n = f \circ f_{n-1}$ با استقراء ثابت کنید :

الف - اگر $f(x) = bx + a$ و $b \neq 1$ آنگاه $f_n(x) = a \frac{b^n - 1}{b - 1} + b^n x$

ب - اگر $f(x) = \frac{x}{1+x}$ آنگاه $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$

۷ - ثابت کنید به ازاء هر عدد طبیعی n دو عدد طبیعی k و l هستند به طوری که $n = 5k - 7l$.

۸ - ثابت کنید به ازاء هر عدد طبیعی n ، $\frac{n^2}{3} + \frac{n^4}{4} + \frac{n}{6} \in \mathbb{N}$

۹ - به استقراء ثابت کنید، $x, y \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ ، $x + y \geq 0$ ،

الف - $(1+a)^n \geq 1+na$ $a \geq -1$

ب - $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ج - $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}$

د - $\frac{n(n+1)}{2} > n!$ ه - $n! \leq (n-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)$

تقسیم

گرچه تمام اعداد صحیح بر یکدیگر بخش پذیر نیستند ولی خاصیت زیر بر روی کلیه اعداد صحیح برقرار است.

قضیه - برای هر دو عدد صحیح a و $b \neq 0$ اعداد صحیح منحصر بفرد q و r یافت میشود به گونه ای که $|b| < r \leq 0$ و $a = bq + r$ و در این صورت q را خارج قسمت و r را باقیمانده یا مانده این تقسیم می نامند.

برهان - فرض می‌کنیم a و b دو عدد صحیح و معین باشند آنگاه مجموعه زیر را در نظر

$$T = \{a - bx \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } a - bx \geq 0\}$$

نشان می‌دهیم که $T \neq \emptyset$ ، یعنی حداقل شامل یک عضو $t \geq 0$ است. اگر فرض کنیم $t = a - b(\pm|a|)$ آنگاه $t \geq 0$ زیرا:

الف- اگر $b > 0$ پس $a \geq -ab \geq -a|a|$ اگر طرفین را ضرب کنیم داریم $t = a + b|a|$ که مثبت یا صفر است.

ب- اگر $b < 0$ پس $b \leq -1$ یا $-b \geq 1$ و $|a| \geq -a$ از ضرب طرفین نامساوی داریم $t = a - b|a|$ که باز هم مثبت یا صفر است.

در نتیجه T غیر خالی است و نیز $T \subset \mathbb{Z}$ و یک کران پائین آن است، پس بنا بر قضیه خواننده شده دارای عضو ابتدا است که آنرا r می‌نامیم یعنی $r \in T$ و $r \geq 0$ بنا برین $q \in \mathbb{Z}$ یافت می‌شود به طوری که

$$r = a - bq \Rightarrow a = bq + r$$

حال ثابت می‌کنیم $|r| < |b|$ ، اگر $|r| < |b|$ نباشد آنگاه $|r| \geq |b|$ و یا $|r| > |b|$ اگر بجای T مساوی آن $a - bq$ را قرار دهیم خواهیم داشت.

$$r - |b| = a - bq - |b| = a - b(q \pm 1)$$

و چون $(q \pm 1) \in \mathbb{Z}$ ، بنابراین $r - |b| \in T$. اما r عضو ابتدای T بود؛ پس $r - |b| \geq r$. و این نشدنی است زیرا $|b|$ یک عدد طبیعی است. لذا، $|r| \geq |b|$ درست نیست یعنی $|r| < |b|$. برای اثبات منحصر بفرد بودن q و r ، گوئیم چون r عضو ابتدای T است منحصر بفرد می‌باشد و در نتیجه q نیز منحصر بفرد خواهد بود.

مثال - اگر $a = -17$ و $b = 5$ آنگاه $b = 5(-2) + 3$ و $-17 = 5(-2) + 3$

مثال - اگر b عددی طبیعی باشد بنا بر قضیه تقسیم هر عدد صحیح نمایش منحصر بفردی

صورت $nb + r$ دارد که در آن r یکی از اعداد $0, 1, 2, 3, \dots, (b-1)$ است. بنابراین هر عدد صحیح را فقط به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$nb + (b-1), nb + \dots, nb + 3, nb + 2, nb + 1, nb \text{ و } nb$$

برای $b = 2$ باشد هر عدد صحیح به یکی از دو صورت $2n$ و $2n + 1$ نوشته میشود

که $2n$ نمایش عدد زوج و $2n + 1$ نمایش عدد فرد در حالت کلی است.

بخش پذیری در \mathbb{Z}

تقسیمهای زیر را در نظر بگیرید:

$$(-15) \div (-3), (-12) \div 5, 17 \div 3, 8 \div 2$$

در کدامیک از این تقسیمها باقیمانده صفر و در کدامیک باقیمانده مخالف صفر است؟

هرگاه باقیمانده تقسیم صفر شد، مقوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq 0$ بخش پذیر نامیم. هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به گونه‌ای که $a = bq$ در این صورت می‌گوییم $b|a$ و به صورت‌های زیر می‌توانیم:

a بر b بخش پذیر است. b عدد a را می‌شمارد (عاد میکند). a مصرب b است. b يك سازه (عامل) a می‌باشد. b يك شمارنده a است. b مقسوم علیه a است.

نقیض $a|b$ را به صورت $b \nmid a$ نمایش میدهیم.

به آسانی دیدمی‌شود که: الف) صفر بر عدد $b \neq 0$ بخش پذیر است و ب) عدد 1 و -1 هر عدد صحیحی را می‌شمرند. (چرا؟)

روشن است که بخش پذیری، یک رابطه در \mathbb{Z} می‌باشد و این رابطه: انعکاسی است زیرا برای هر عدد صحیح a داریم $a = a \times 1$. پس $a|a$ متعنی است، زیرا اگر $b|c$ و $a|b$ و آنگاه $a|c$.

$$a|b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : b = aq \quad \text{چون:}$$

$$b|c \Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Z} : c = bq' \quad \text{و}$$

$$c = bq' = (aq)q' = a(qq') \quad aq_1 \quad \text{در نتیجه:}$$

$(q_1 = qq')$ پس $a|c$ اما این رابطه متقارن نیست، زیرا برای مثال $6|2$ ولی

$$2 \nmid 6, \quad 2 \nmid -2, \quad -2 \nmid 2, \quad 2|2 \quad \text{ولی } 2 \neq -2.$$

ویژگیهای ابتدایی بخش پذیری در \mathbb{Z}

قضیه: هرگاه a, b و c سه عدد صحیح دلخواه باشند:

- ۱- اگر $a|b$ ، آنگاه: الف) $a|b$ ، ب) $a|-b$ ، ج) $a|(-a)$.
- ۲- برای هر $b \neq 0$ اگر $a|b$ ، آنگاه: الف) برای هر $m, b|mb$ ، ب) $a|mb$ ، $me \in \mathbb{Z}$ ، $a|mb$ ، $a|b$ ، $a|a$.
- ۳- اگر $a|1$ ، آنگاه $a = \pm 1$ (تنها شمارنده‌های عدد 1 ، اعداد 1 و -1 می‌باشند).
- ۴- اگر $a|b$ و $a|a$ ، آنگاه $a|\pm b$.
- ۵- اگر $a|b$ و $a|c$ ، آنگاه $a|b \pm c$.

برهان

$$1- \text{ اگر } a|b \text{ با به تعریف } b = aq \text{ در نتیجه}$$

$$-b = a(-q) = (-a)q$$

و نیز

معنی الف، ب، ج برقرارند.

۲- از $a \mid b$ داریم $b = aq$ ، در نتیجه :

$$b = aq \Rightarrow mb = m(aq) = a(mq) \Rightarrow a \mid mb \quad (\text{الف})$$

$$b = aq \Rightarrow |b| = |aq| = |a| \cdot |q| \quad (\text{ب})$$

چون $b \neq 0$ در نتیجه $q \neq 0$ و $|q| \geq 1$ پس $|b| = |a| \cdot |q| \geq |a|$

۳- اگر $a \mid 1$ بنابر (۲) داریم $|a| \leq 1$ یعنی $|a| = 0$ یا $|a| = 1$ ، اما اگر

$|a| = 0$ آنگاه $a = 0$ ولی $1 \nmid 0$ ، پس $|a| = 1$ ، در نتیجه $a = \pm 1$.

۴- اگر $a \mid b$ و $a \mid a$ ، آنگاه داریم :

$$a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$$

$$b \mid a \Rightarrow |b| \leq |a|$$

در نتیجه $|a| = |b|$ ، بنابراین $a = \pm b$.

۵- اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ ، آنگاه داریم :

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : b = aq \\ a \mid c \Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Z} : c = aq' \end{array} \right\} \Rightarrow b \pm c = a(q \pm q')$$

یعنی $a \mid b \pm c$.

بزرگترین شمارنده مشترک (بزرگترین مقسوم علیه مشترک)

اگر a و b دو عدد صحیح باشند، عدد d را شمارنده مشترک آنها می گویند اگر $d \mid a$ و $d \mid b$.

و مجموعه مقسوم علیه های مثبت a و b عبارت است از $S = \{d \mid d > 0, d \mid a \wedge d \mid b\}$

چون عدد يك کلیه اعداد صحیح را می شمارد پس عدد ۱ شمارنده مشترک مثبت هر دو عدد a و b می باشد.

لذا مجموعه شمارنده های مشترک مثبت a و b غیر تهی است. اگر a و b هر دو صفر باشند،

مجموعه شمارنده های مشترک مثبت آنها نامتناهی می شود. اما اگر حداقل یکی از آنها مخالف صفر

باشد (مثلاً $a \neq 0$) در این حالت شمارنده های مشترک مثبت a و b بایستی کوچکتر یا مساوی $|a|$

باشند. یعنی مجموعه شمارنده های مشترک مثبت دو عدد a و b کراندار از بالا، خواهد بود. عضو

انتهای این مجموعه را که وجود دارد بزرگترین شمارنده مشترک دو عدد a و b گویند. تعریف بزرگترین

شمارنده مشترک را بصورت زیر نیز میتوان بیان نمود.

تعریف : اگر a و b دو عدد صحیح بوده و حداقل یکی از آنها مخالف صفر باشد، بزرگترین

شمارنده مشترک این دو عدد که با $(a$ و $b)$ نمایش می دهند عبارتست از عدد طبیعی d بطوریکه :

$$d \mid a \text{ و } d \mid b \quad (\text{الف}) \quad \text{اگر } a \mid c \text{ و } b \mid c \text{ آنگاه } c \leq d \quad (\text{ب})$$

و یا هر مقسوم علیه a و b مقسوم علیه d و هر مقسوم علیه d مقسوم علیه a و b باشد .

مثال ۱- شمارنده‌های مثبت ۱۲ — عبارتند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ و شمارنده‌های مثبت ۳۰ عبارتند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۵، ۳۰ و لذا شمارنده‌های مشترک مثبت آنها اعداد ۱، ۲، ۳، ۶، هستند که بزرگترین آنها ۶ می‌باشد، یعنی $\text{E}(12, 30) = 6$.

مثال ۲- اگر $a \mid b$ آنگاه $a \mid (a+b)$.

زیرا هر مقسوم علیه $a \mid$ يك مقسوم علیه مشترك a و b است حال اگر c يك مقسوم علیه مشترك a و b باشد $a \mid c$ و یا $a \mid c$ ، پس هر مقسوم علیه مشترك a و b يك مقسوم علیه $a \mid$ است، بنابراین: $a \mid (a+b)$.

تعریف - دو عدد صحیح a و b را نسبت به هم اول گویند، هر گاه $\text{E}(a, b) = 1$.

مثال- اعداد ۲ و ۹ نسبت به هم اولند زیرا $\text{E}(9, 2) = 1$ ، ولی ۶ و ۹ نسبت به هم اول نیستند چون $\text{E}(9, 6) = 3$.

قضیه- اگر a و b دو عدد صحیح باشند بطوریکه حداقل یکی از آنها صفر نباشد آنگاه عدد-

های صحیح r و s یافت می‌شوند به گونه‌ای که:

$$(a, b) = ra + sb$$

برهان- فرض می‌کنیم A مجموعه تمام اعداد طبیعی باشد که بتوان بصورت $ma + nb$ با $m, n \in \mathbb{Z}$ نوشت (اعضای مجموعه A را ترکیبات خطی صحیح و مثبت a و b می‌نامند).

$$A = \{ma + nb : ma + nb > 0, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

چون حداقل یکی از دو عدد غیر منفی a و b $|a| = 1 \times a + 0 \times b$ یا $|b| = 0 \times a + 1 \times b$ مخالف صفر است پس $A \neq \emptyset$ و $A \subset \mathbb{N}$ در نتیجه A دارای عضو ابتدا است که آنرا d می‌نامیم. پس اعداد صحیح r و s وجود دارند بطوریکه $0 < d = ra + sb$ (۱).

حال ثابت می‌کنیم d بزرگترین شمارنده مشترك a و b است.

a را بر d تقسیم می‌کنیم، بنابراین الگوریتم تقسیم اعداد منحصراً بقدر q و t یافت می‌شوند بطوریکه

$$a = dq + t \quad \text{و} \quad 0 \leq t < d$$

اگر $t > 0$ با توجه به (۱) داریم: $t = a - dq = a - raq - sbq = a(1 - rq) + b(-sq)$ یعنی عدد $t \in A$ که متناقض با عضو ابتدا بودن d می‌باشد. پس $t = 0$ یعنی $d \mid a$ بهین ترتیب $d \mid b$ یعنی d شمارنده مشترك a و b است.

حال اگر $a \mid x$ و $b \mid x$ نتیجه می‌شود $a \mid ra + sb$ یعنی $x \mid d$ پس $x \leq d$ یعنی d بزرگترین شمارنده مشترك می‌باشد.

$$\text{مثال:} \quad (12, 32) = 4 = (-1) \times 32 + 3 \times 12$$

نتایج زیر از قضیه فوق بدست می‌آید:

نتیجه ۱- اگر a و b نسبت به هم اول باشد یعنی $\text{E}(a, b) = 1$ آنگاه اعداد صحیح

$$r \text{ و } s \text{ یگانه‌ای یافت می‌شوند که: } ra + sb = 1$$

نتیجه ۲- بالعکس اگر $ra + sb = 1$ آنگاه $(a, b) = 1$ زیرا اگر $(a, b) = c$ آنگاه $c | ra$ و $c | sb$ پس $c | 1$ یعنی $c = 1$.

نتیجه ۳- $A = \{ma + nb : m, n \in \mathbb{Z}\}$ مجموعه تمام مضارب، بزرگترین شمارنده مشترک a و b می باشد. یعنی اگر $(a, b) = d$ آنگاه $A = \{dt : t \in \mathbb{Z}\}$ (چرا؟)

نتیجه ۴- (لم اقلیدس) - اگر $a | bc$ و $(a, b) = 1$ آنگاه $a | c$
 برهان - بنا بر نتیجه (۱)، اعداد s و t یافت میشوند به گونه ای که $1 = as + bt$
 $c = cas + cbt$ پس:
 اما چون $a | bc$ ، طبق تعریف عدد صحیح m وجود دارد بطوریکه $bc = ma$
 $c = cas + mat = a(cs + mt)$ پس:
 در نتیجه $a | c$.

نتیجه ۵- اگر $(a, b) = d$ و $k \in \mathbb{N}$ آنگاه $(ka, kb) = kd$ چرا؟
 برهان - فرض کنیم $(ka, kb) = d_1$ ، طبق فرض داریم: $d_1 | a \wedge d_1 | b$ یا
 $kd | ka \wedge kd | kb$ پس $kd | d_1$ یا $kd \leq d_1$ از طرفی داریم:

$$ra + sb = d \Rightarrow r(ka) + s(kb) = kd$$

و چون d_1 را بزرگترین مقسوم علیه مشترک ka و kb گرفتیم پس d_1 ترکیب خطی ka و kb می
 kd را می شمارد: $d_1 | kd$ یا $d_1 \leq kd$ (۲) از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود $d_1 = kd$.
 قضیه اگر $(a, b) = d$ آنگاه $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ نسبت بهم اولند.

برهان -

$$\{a, b\} = d \Rightarrow ra + sb = d$$

با توجه به نتیجه ۲:

$$\therefore r \frac{a}{d} + s \frac{b}{d} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{d} \text{ و } \frac{b}{d} \right) = 1$$

قضیه - اگر $(a, b) = 1$ و $(a, c) = 1$ آنگاه $(a, bc) = 1$.
 برهان - چون $(a, b) = 1$ پس $rac + sbc = c(ra + sb) = c$ و $(rc)a + s(bc) = c$
 این تساوی نشان میدهد که مقسوم علیه مشترک a و bc عدد c را می شمارد ولی $(a, c) = 1$ پس $(a, bc) = 1$.

مفهوم بزرگترین شمارنده مشترک چند عدد صحیح را نیز می توان بطور طبعی تعریف نمود
 اما از بحث بیشتر در این مورد خودداری می شود.

الگوریتم اقلیدسی^۱

الگوریتم اقلیدسی روشی برای تعیین ب.م.م دو عدد است که می توان آن را بعنوان قضیه وجود ب.م.م دوددد، بیان نمود.^۲

قضیه (الگوریتم اقلیدسی) - فرض کنید a و b دوددد طبیعی باشد.

الف) دسته هائی از اعداد صحیح غیرمنفی مانند r_1, r_2, \dots, r_{n-1} و q_1, q_2, \dots, q_{n-1}

وجود دارند بطوریکه: $0 \leq r_1 < b$ $a = bq_1 + r_1$

$0 \leq r_2 < r_1$ $b = r_1q_2 + r_2$

$0 \leq r_n < r_{n-1}$ $r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n$

$r_{n-1} = r_nq_n$

ب) r_n ب.م.م اعداد a و b است.

ج) دو عدد صحیح r و s وجود دارند بطوریکه: $(a, b) = r_n = ra + sb$.

برهان الف - عدد a را بر b تقسیم می کنیم بنا بر قضیه تقسیم q_1 و r_1 وجود دارد که:

$$(1) \quad a = bq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < b$$

اگر $r_1 = 0$ آنگاه $(a, b) = b$ و $b | a$ و اگر $r_1 \neq 0$ باشد عدد b را بر r_1

تقسیم می کنیم. عددهای q_2 و r_2 هست که:

$$(2) \quad b = r_1q_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

اگر $r_2 = 0$ باشد بنا بر (۱) هر مقسوم علیه مشترک a و b يك مقسوم علیه مشترك r_1 و b است و بالعکس، بنابراین $(a, b) = (b, r_1) = r_1$.

حال اگر $r_2 \neq 0$ باشد عدد r_1 را بر r_2 تقسیم می کنیم بالتبجه:

$$(3) \quad r_1 = r_2q_3 + r_3 \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

همین ترتیب این عمل را ادامه می دهیم بالاخره به مرحله ای می رسیم که باقیمانده صفر

می شود زیرا $\dots > r_2 > r_3 > b$ و r_1 و r_2 و \dots نزولی هستند و حداکثر بعد از b مرتبه

به صفر می رسد، فرض کنید اولین باقیمانده ای باشد که صفر است.

در اینصورت خواهیم داشت:

$$(1) \quad a = bq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < b$$

۱ - الگوریتم، که از نام کلمه الخوارزمی (وفات حدود ۲۲۵ هجری شمسی) ریاضیدان معروف

ایرانی گرفته شده است، به مجموعه اعمال متوالی و ترتیبی اطلاق می گردد که در آن هر عمل از عمل

قبلی خود به دست آمده باشد (فن محاسبه)

۲ - بزرگترین مقسوم علیه مشترك.

از رابطه (۲) ۲۳ را حساب می‌کنیم
و از رابطه (۳) ۸۶ را حساب می‌کنیم و در (I) قرار می‌دهیم.

$$23 = 129 - (272 - 129 \times 2) \times 1$$

$$23 = 129 \times 2 - 272 \times 1 \quad \text{(II)} \quad \text{و یا:}$$

و همین ترتیب از رابطه (۲) ۱۲۹ را حساب می‌کنیم و در (II) قرار می‌دهیم.

$$23 = (602 - 272 \times 1) \times 2 - 272 \times 1$$

$$23 = 602 \times 2 - 5 \times 272 \quad \text{(III)} \quad \text{و یا:}$$

و از رابطه (۱) ۲۷۲ را حساب می‌کنیم و در (III) قرار می‌دهیم.

$$23 = 602 \times 2 - 5(1075 - 1 \times 602)$$

$$23 = 9 \times 602 - 5 \times 1075$$

$$23 = (-5) \times 1075 + 9 \times 602$$

در این صورت $s = 9$ و $r = (-5)$ است.

کوچکترین مضرب مشترک

فرض کنید که a و b اعداد صحیح باشند و c عدد صحیحی باشد که $a|c$ و $b|c$ در این صورت c را مضرب مشترک a و b می‌خوانیم. بدیهی است که اگر a یا b صفر باشد مضرب مشترک آنها صفر خواهد بود. بنابراین فرض می‌کنیم a و b مخالف صفر باشند. فرض می‌کنیم S مجموعه مضربهای مشترک مثبت a و b باشد یعنی:

$$S = \{c | c > 0, a|c, b|c\}$$

$S \neq \emptyset$ است زیرا $|ab| \in S$ است و چون S زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی است از اینرو بنابر اصل خوش‌ترتیبی دارای عضو ابتدا است. بنابر تعریف عضو ابتدای مجموعه S یعنی مجموعه مضربهای مشترک مثبت اعداد a و b را کوچکترین مضرب مشترک a و b می‌نامیم و با $[a, b]$ نمایش می‌دهیم. تعریف دیگر کوچکترین مضرب مشترک دو عدد را در زیر بیان می‌کنیم. تعریف - کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b (a و b مخالف صفر) عبارت است از عدد صحیح و مثبت c بطوریکه: (الف) $a|c$ و $b|c$ (ب) اگر $m > 0$ و $a|m$ و $b|m$ آنگاه $m \leq c$.

بعبارت دیگر هر مضرب مشترک a و b مضرب c است و هر مضرب c مضرب مشترک a و b است.

تبصره - اگر $|b|$ آنگاه $[a, b] = |b|$ است.

مثال - مضربهای مشترك مثبت دو عدد ۱۲- و ۳۰ عبارتند از: ۶۰، ۱۲۰، ۱۸۰، ... و
 بنابرین $[۱۲، ۳۰] = ۶۰$.

قضیه - اگر $m = [a، b]$ هم مضرب مشتركی برای a و b باشد، آنگاه $c|m$.
 برهان - m را بر c تقسیم می کنیم، بنا بر الگوریتم تقسیم اعداد منحصربفرد q و r یافت
 می شوند به گونه ای که $0 \leq r < c$ و $m = cq + r$.

اگر $r \neq 0$ ، چون $a|m$ و $a|c$ آنگاه $a|m - cq$ یعنی $a|r$ و به همین ترتیب $b|r$ یعنی r هم
 مضرب مشترك a و b می باشد، پس $r \geq c$ که متناقض با تعریف r می باشد. پس $r = 0$ یعنی
 $m = cq$ یا $c|m$.

قضیه - برای هر دو عدد صحیح غیر صفر a و b داریم: $(a، b) = |ab|$.
 برهان - در اثبات این قضیه بدون اینکه به کلی بودن استدلال لطمه ای وارد آید می توان
 a و b را مثبت در نظر گرفت، (چرا؟)

فرض می کنیم $(a، b) = d$ بنا بر این $a = da'$ و $b = db'$ و اگر $\frac{ab}{d} = c$ باشد در این
 صورت $c = ba' = ab'$ یعنی c مضرب مشترك a و b است پس خاصیت (الف) تعریف برقرار است.
 حال فرض می کنیم m نیز مضرب a و b باشد در این صورت

$$m = ak = bk' \quad (۱)$$

و چون d بزرگترین مقسوم علیه مشترك a و b است بنا بر این

$$d = ra + sb$$

$$md = m(ra + sb) = mra + msb \quad \text{و}$$

$$md = bk'ra + aksb \quad \text{و با توجه به رابطه (۱)}$$

$$md = ab(k'r + sk) \quad \text{و یا}$$

$$md = cd(k'r + sk) \quad \text{و چون } ab = cd \text{ پس}$$

$$m = c(k'r + sk) \quad \text{و یا}$$

یعنی $c|m$ و یا $c \leq m$ یعنی خاصیت (ب) برقرار است پس c کوچکترین مضرب مشترك

$$a \text{ و } b \text{ است بنا بر این } [a، b] = \frac{ab}{(a، b)} \text{ و } (a، b) = |ab| \text{ یا } [a، b] = |ab|$$

مفهوم کوچکترین مضرب مشترك چند عدد صحیح را نیز می توان بطور طبیعی تعمیم داد.

$$\text{قضیه - } ab|c \Rightarrow (a، b) = 1 \text{ و } (a|c \wedge b|c)$$

برهان - داریم (۱) $aq_1 = c$ و (۲) $bq_2 = c$ در نتیجه $aq_1 = bq_2$ (۳). طرف چپ

(۳) را می شمارد پس طرف راست را می شمارد و چون b اول است پس q_1 را می شمارد یعنی $a|q_1$

و یا $q_1 = aq_2$ بجای q_1 در (۲) قرار می دهیم می شود: $c = abq_2$ یعنی $ab|c$.

اعداد اول

میدانیم که هر عدد صحیح $a > 1$ بر اعداد طبیعی 1 و a بخش پذیر است. هرگاه این اعداد تنها شمارنده‌های مثبت عدد a باشند، a را اول گویند.

تعریف - عدد صحیح $p > 1$ را عدد اول گویند اگر تنها شمارنده‌های مثبت آن 1 و p باشند.

هر عدد طبیعی مخالف 1 که اول نباشد را عدد تجزیه پذیر نامند.

مثال - اعداد $2, 3, 5, 7$ و اول و $4, 6, 8, 9$ تجزیه پذیر می‌باشند.

قضیه - اگر p عدد اول باشد و $p \mid ab$ آنگاه $p \mid a$ یا $p \mid b$.

برهان - اگر $p \nmid a$ آنگاه $(p, a) = 1$ (چرا؟) و در نتیجه بنابر لم اولدس $p \mid b$.

قضیه - هر عدد طبیعی $a \neq 1$ حداقل دارای یک شمارنده اول می‌باشد.

برهان - مجموعه $\{n: n \in \mathbb{Z}, n > 1, n \mid a\}$ را در نظر میگیریم. این زیرمجموعه‌ای از

اعداد طبیعی است و چون $a \neq 1$ ، پس a عضوی از آن مجموعه می‌باشد، لذا غیر تهی است و در

نتیجه بر اساس اصل خوشترتیبی دارای عضو ابتدا است. این عضو ابتدا را p می‌نامیم و ثابت

می‌کنیم p اول است.

اگر p اول نباشد، آنگاه تجزیه پذیر است و لذا دارای شمارنده مثبتی بجز 1 و p می‌باشد.

این شمارنده را q می‌نامیم. بنابر (۲ب) از قضیه بخش پذیری در \mathbb{Z} و $q < p$ و به خاصیت

تعددی بخش پذیری $q \mid a$ ، یعنی q هم متعلق به مجموعه مورد نظر ما می‌باشد که این با عضو ابتدا

بودن p تناقض دارد و در نتیجه p اول می‌شود.

قضیه بنیادی حساب - هر عدد طبیعی $n > 1$ غیر اولد می‌توان به صورت $n = p_1 p_2 \dots p_k$

نوشت که در آن p_1, p_2, \dots, p_k اعداد اول هستند. به عبارت دیگر n را میتوان به حاصلضرب

عاملهای اول تجزیه نمود.

برهان - فرض می‌کنیم X مجموعه اعداد طبیعی غیر اول باشد که بزرگتر از 1 بوده و نتوان

آنها را به عوامل اول تجزیه نمود. باید ثابت کنیم که $X = \emptyset$ هرگاه $X \subseteq \mathbb{N}$ ، در نتیجه

X دارای عضو ابتدا مانند a می‌باشد. بنا به تعریف $a > 1$ و در نتیجه بنابر قضیه قبل عدد اولی

مانند p یافت می‌شود، بگونه‌ای که $p \mid a$. فرض می‌کنیم $a = pb$ ، چون $p > 1$ در نتیجه $b < a$

بنابر این $b \notin X$ یعنی b را میتوان به عوامل اول تجزیه نمود. برای مثال $b = q_1 q_2 \dots q_r$ و در نتیجه

$a = p q_1 q_2 \dots q_r$ ، یعنی a به عوامل اول تجزیه می‌شود که با فرض $a \in X$ متناقض است.

بنابر این $X = \emptyset$.

بصره - شکل $n = p_1 p_2 \dots p_k$ را تجزیه به عاملهای اول، p_1, p_2, \dots, p_k را عاملهای

اول عدد n می‌نامیم. در حالت کلی یک عامل اول ممکن است بیش از یکبار ظاهر شود برای مثال:

$۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳$ که اگر عاملهای تکراری را کنار هم نوشته و از توان استفاده شود آنگاه می توان بصورت $۲^۱ \times ۳^۱$ نوشت.

بطور کلی هر عدد طبیعی n را می توان به شکل زیر تجزیه کرد:

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

که در آن p_1, p_2, \dots, p_k اعداد اول متفاوت و n_1, n_2, \dots, n_k اعداد صحیح غیر منفی خواهند بود.

$$\text{مثال: } ۴۳۲۰ = ۲^۵ \times ۳^۲ \times ۵^۱$$

بصورت $۲ -$ اگر $n = -۱$ عدد صحیح منفی باشد، $n -$ مثبت خواهد بود و برای این صق بصورت

$$-n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

۱ می توان نوشت:

$$n = -p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

یا:

$$n = \pm p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

و بطور کلی برای هر عدد صحیح غیر صفر n ، میتوان نوشت:

که در آن p_1, p_2, \dots, p_k اعداد اول متفاوت و n_1, n_2, \dots, n_k اعداد صحیح غیر منفی می باشند ($p = ۱$) بحث اعداد اول یکی از مباحث اصلی نظریه اعداد است و کاربردهایی هم در مسائل دیگر ریاضی دارد که ارائه آنها از حدود این کتاب خارج است.

قضیه - مجموعه اعداد اول نامتناهی است.

برهان - فرض کنیم p_1, p_2, \dots, p_n اعداد اول باشند و گفته شود که اعداد اول فقط این هستند ثابت می کنیم که عدد اولی غیر از اینها نیز وجود دارد. برای این منظور حاصلضرب این اعداد اول را P می نامیم

$$P = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n \quad (p_1 = ۲ \text{ و } p_2 = ۳, \dots)$$

به طرفین این تساوی عدد ۱ را اضافه می کنیم

$$P + ۱ = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + ۱$$

$P + ۱$ دارای عامل اولی غیر از p_1, p_2, \dots, p_n است زیرا، اگر این عامل اول یکی از عاملهای P باشد، آنگاه P را می شمرد $P + ۱$ را هم که می شمرد لذا تفاضل $P + ۱$ از P یعنی ۱ را می شمرد و این نشدنی است.

قضیه - اگر $n > ۱$ عدد صحیح غیر اول باشد آنگاه عدد اولی مانند p وجود دارد که:

$$p \leq \sqrt{n}, \quad p | n$$

برهان - چون n اول نیست اعداد صحیح مثبت a و b وجود دارند بطوریکه:

$$۱ \leq a \leq b < n, \quad n = ab$$

بنابراین $n = ab \geq a^2$ یا $\sqrt{n} \geq a$ ؛ فرض می کنیم p عددی اول باشد که $p | a$ در این صورت

$p|n$ و در نتیجه $p \leq a \leq \sqrt{n}$ خواهد بود.

نتیجه - از قضیه فوق برای اینکه تحقیق کنیم عدد صحیح n که $n > 1$ اول است یا نه کافی است تحقیق کنیم که n بر اعداد اول p که $p \leq \sqrt{n}$ است بخش پذیر است یا نه و باین ترتیب تا حد زیادی تعیین اینکه عددی اول است یا نه آسانتر می شود.

مثال - آیا عدد $n = 271$ اول است؟ می دانیم $17 < \sqrt{271} < 16$ و بنابراین یا 271 اول است یا عدد اولی مانند p که $p \leq 16$ باشد وجود دارد که $p|271$ بنا بر این کافی است بخش پذیری 271 را بر اعداد 2، 3، 5، 7، 11 و 13 تحقیق کنیم که در مورد 271 ملاحظه می شود 271 اول است.

تجربه: فریال ارانستن با استفاده از همین روش بدست آمده است.

تمرین

۱- ثابت کنید

$$a|b \Rightarrow a^n|b^n ; a|b \Rightarrow a^2|b^2 ; 5|2n+1 \Rightarrow 25|19n^2+19n+6$$

۲- ثابت کنید هر عدد فرد را می توان به یکی از صورتهای $4n+1$ ، $4n+3$ و مربع آن را به صورت $4n+1$ نوشت.

۳- ثابت کنید $((a, b), c) = (a, (b, c))$.

$$(a, [a, b]) = [a, (a, b)] = |a| - 4$$

$$8|m^4+n^4-2, 8|m^2-n^2 \text{ آنگاه } n \text{ و } m \text{ فرد باشند}$$

$$6|n^2-n \text{ و } 6|n^2-n \text{ و } 6|n^2-n \text{ آنگاه ثابت کنید: } (ax+by, ar+bs) = (a, b) \text{ اگر } 1 \pm sx-ry$$

$$7- \text{ ثابت کنید: } 1-15|n^3+2n$$

۸- اگر a و b دو عدد صحیح باشند که حداقل یکی از آنها صفر نباشد، ثابت کنید:

$$(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$$

$$9- \text{ ثابت کنید، هرگاه } 1 \mid (a, b) \text{ و } 1 \mid (a, c) \text{ آنگاه } 1 \mid (c, b)$$

$$10- \text{ اگر } (a, b) = d \text{ و } d' \mid d \text{ آنگاه } \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{d'}{d}$$

$$11- \text{ ثابت کنید: } (ka, kb) = kd \Rightarrow (a, b) = d \text{ (} k > 0 \text{)}$$

۱۲- اگر a, b, c عددهای صحیح باشند ثابت کنید:

$$(ab, c) = 1 \Rightarrow (a, c) = 1 \text{ و } (b, c) = 1$$

۱۳- اگر $(a, b) = 1$ ، ثابت کنید:

$$(a^n, b) = 1 \text{ ، } n \in \mathbb{N}$$

$$(a^n, b^m) = 1 \text{ ، } n, m \in \mathbb{N}$$

۱۴- ثابت کنید :

$$(a \text{ و } b) = 1 \iff (a \text{ و } a \pm b) = 1$$

۱۵- ثابت کنید اگر دو عدد نسبت بهم اول باشند حاصلضرب و مجموع آنها نیز نسبت بهم اولند.

۱۶- ثابت کنید اگر a و b نسبت بهم اول باشند حاصلضرب و تفاضل آنها نیز نسبت بهم اولند.

۱۷- بزرگترین شمارنده مشترك دو عدد ۷۲ و عدد بزرگتر ۸۶۲ می باشد؛ مطلوبست تعیین عدد کوچکتر. (در $|N|$ حساب کنید)

۱۸- حاصلضرب دو عدد ۶۴۸ و بزرگترین شمارنده مشتركشان ۶ است، آنها چه اعدادی می توانند باشند؟ (در $|N|$ حساب کنید)

۱۹- بزرگترین شمارنده مشترك دو عدد ۱۵۵ و کوچکترین مضرب مشترك آنها ۹۰ می باشد. آنها چه اعدادی می توانند باشند؟ (در $|N|$ حساب کنید)

۲۰- مطلوبست تعیین دو عدد که مجموعشان ۲۶ و کوچکترین مضرب مشتركشان ۱۵۵ باشد.

$$21- \text{ ثابت کنید } (a^n, b^n) = d^n \iff (a, b) = d.$$

$$22- \text{ ثابت کنید } a^n | b^n \implies a | b.$$

$$23- \text{ ثابت کنید اگر } b | c \text{ آنگاه } (a + c, b) = (a, b).$$

$$24- \text{ ثابت کنید دو عدد } 9n + 7 \text{ و } 5n + 4 \text{ دارای جميع مقادير } n \text{ نسبت بهم اولند.}$$

۲۵- ثابت کنید که دو عدد $a - 3$ و $a^2 - 4a + 1$ یا نسبت بهم اولند یا بزرگترین شمارنده مشترك آنها ۱۲ است.

$$26- \text{ ثابت کنید هر عدد اول غير از } 3 \text{ و } 7 \text{ مضربي از } 6 \text{ است علاوه پامنهای يك.}$$

$$27- \text{ اگر } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ دو بدو نسبت بهم اول باشند. ثابت کنید.}$$

$$(ab + bc + ac \text{ و } abc) = 1$$

$$28- \text{ ثابت کنید :}$$

$$[a \cdot b] = c \iff [ma \cdot mb] = mc$$

$$[a, b] = c \iff [a^n, b^n] = c^n$$

هفته هشتی

در این قسمت مفهوم همنهشتی، همراه با چند مثال بیان خواهد شد.

مثال ۱ - کلاسی ۴۸ شاگرد دارد، روزی معلم تصمیم میگیرد برای جایزه دانش آموزان بدترین دفتر کلاس، به نفر اول سیب. بد نفر دوم پرتقال و به نفر سوم انار بدهد و عمل توزیع را

به همین ترتیب تکرار کنند. یعنی به نفر چهارم سیب، به نفر پنجم برتقال و به نفر ششم انار بدهد و...
در این مثال ملاحظه می کنیم که:

الف- مجموعه شماره دانش آموزانی که سیب به آنها میرسد عبارتست از:

$$A_1 = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46\}$$

ب- مجموعه شماره دانش آموزانی که برتقال به آنها میرسد عبارتست از:

$$A_2 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47\}$$

ج- مجموعه شماره دانش آموزانی که انار به آنها میرسد عبارتست از:

$$A_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48\}$$

$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3 = \emptyset$$

د- اگر A مجموعه شماره های تمام شاگردان این کلاس باشد خواهیم داشت:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

و- اگر m و n دو عدد دلخواه متعلق به یکی از مجموعه های A_1 ، A_2 یا A_3 باشند،
خواهیم داشت: $m - n = 3k$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$.

ممکن است تا به حال حدس زده باشید که عدد ۳ در این مثال نقشی مهمی دارد.

مثال ۳- یک کلاس ۴۲ نفری برای یک اردوی ۴۲ روزه به خارج شهر می روند. مربی اردو
با موافقت دانش آموزان قرار می گذارد که به ترتیب دهر کلاس، هر روز یک نفر مأمور انتظامات باشد.
هرگاه مأموریت فراول روز شنبه، فردوم روز یکشنبه، نفر سوم روز دوشنبه و... و نفر هفتم روز
جمعه باشد و این عمل به همین ترتیب ادامه پیدا کند، به پرسشهای زیر پاسخ دهید:

به نفرات با شماره های ۱۳، ۲۳، ۲۷، ۴۱ چه روزی از هفته نوبت خواهد رسید؟

مجموعه شماره افرادی که نوبت آنها روزهای شنبه است را با A_1 نشان دهید و آنرا مشخص
نمایند. مجموعه شماره افرادی که نوبت آنها روزهای یکشنبه است را با A_2 نشان دهید و آنرا
مشخص نمایند...

مجموعه شماره افرادی که نوبت آنها روزهای جمعه است را با A_3 نشان دهید و آنرا
مشخص نمایند.

آیا مجموعه های A_1 و A_2 و... و A_7 عضو مشترکی دارند؟

باقیمانده های تقسیم هر دو عدد دلخواه متعلق به یکی از مجموعه های A_1 و A_2 و... و A_7 به
برچه عددی با هم برابرند؟

تفاضل هر دو عدد دلخواه متعلق به یکی از مجموعه های A_1 و A_2 و... و A_7 مضرب چه
عددی است؟

چه عددی در این مثال نقشی مهم را بازی میکند؟

در این دو مثال هر يك از مجموعه‌های بدست آمده را يك دسته همنهشتی و هر يك از اعداد ۳ و ۷ را «پیمانه»، «سج» یا «میزان» همنهشتی مینامند. هر دو عدد متعلق به يك دسته همنهشتی دارای این خاصیت است که تفاضل آنها مضربی است از پیمانه، به عبارت دیگر، تفاضل هر دو عدد متعلق به يك دسته همنهشتی بر عدد پیمانه بخش پذیر است.

هر دو عدد را که در يك دسته همنهشتی باشند نسبت به پیمانه همنهشت نامند.

اینك با توجه به مطالب بالا به تعریف دقیق همنهشتی می پردازیم:

تعریف - فرض کنیم m يك عدد طبیعی باشد، دو عدد صحیح a و b را، به پیمانه m ، همنهشت گویند هر گاه $a - b$ مضرب m باشد، یعنی $a - b$ بر m بخش پذیر باشد.

همنهشت بودن دو عدد a و b به پیمانه m را به صورت های زیر نمایش میدهند:

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{یا} \quad a \equiv b \pmod{m}$$

و میخوانند a همنهشت با b است به پیمانه یا سج m .

مثال: (پیمانه ۶) $۱۶ \equiv ۲۲$ ، زیرا $۱۶ - ۲۲ = -۶$ بر ۶ بخش پذیر است.

(پیمانه ۶) $۲ \equiv -۸$ ، زیرا $۲ - (-۸) = ۱۰$ بر ۶ بخش پذیر است.

(پیمانه ۷) $۱۹ \equiv ۵۴$ ، زیرا $۱۹ - ۵۴ = -۳۵$ بر ۷ بخش پذیر است.

ولی

(پیمانه ۶) $۵ \not\equiv ۸$ ، زیرا $۵ - ۸ = -۳$ بر ۶ بخش پذیر نیست.

(پیمانه ۳) $۳ \not\equiv ۸$ ، زیرا $۳ - ۸ = -۵$ بر ۳ بخش پذیر نیست.

(توجه کنید نقیض (پیمانه m) $a \equiv b$ را چنین می نویسند: (پیمانه m) $a \not\equiv b$)

همنهشتی را میتوان يك رابطه در مجموعه اعداد صحیح به شکل زیر دانست:

$$R_m = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m}\}$$

حال نشان میدهم:

قضیه: همنهشتی به پیمانه m يك رابطه هم ارزی است.

برهان

۱- خاصیت انعکاسی - برای هر عدد صحیح a داریم:

$$a - a = 0 \times m$$

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a \equiv a \pmod{m}$$

پس:

۲- خاصیت نقیضی - اگر (پیمانه m) $a \equiv b$ ، آنگاه عدد صحیح k یافت می شود به

گونه ای که $a - b = mk$. از ضرب طرفین این تساوی در (-۱) خواهیم داشت:

$$b - a = m(-k) \quad \text{یعنی} \quad b - a \equiv 0 \pmod{m} \quad \text{در نتیجه:} \quad b \equiv a \pmod{m}$$

۳- خاصیت متعدی - هر گاه a و b و c سه عدد صحیح دلخواه باشند بطوریکه:

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{و} \quad b \equiv c \pmod{m}$$

آنگاه اعداد صحیح k_1 و k_2 یافت میشوند به گونه ای که:

$$a - b = mk_1 \text{ و } b - c = mk_2$$

از جمع طرفین این دو تساوی نتیجه می شود:

$$a - c = m(k_1 + k_2) = mk$$

که در آن $k = k_1 + k_2$ یک عدد صحیح است. در نتیجه

$$a \equiv c \pmod{m} \text{ (پیمانه)}$$

بنابر قضیه فوق، رابطه همبستگی به پیمانه m ، مجموعه \mathbb{Z} را بدسته های هم ارزی افراز می کند.

مجموعه تمام دسته های همبست به پیمانه m را $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ یا \mathbb{Z}_m و مجموعه تمام اعداد

صحیح که با a همبست به پیمانه m هستند را با $[a]$ یا \bar{a} نمایش میدهند.

$[a]$ یک دسته هم ارزی و a نماینده این دسته میباشد.

اگر b عضو دیگری از دسته هم ارزی $[a]$ باشد داریم $[a] = [b]$ و بطور کلی میتوان

ثابت کرد: $[a] = [b] \iff a \equiv b \pmod{m}$ (پیمانه)

مثلا در همبستگی به پیمانه ۶ داریم:

$$[15] = [3] = [-3] = \dots$$

$$[-5] = [1] = [13] = \dots$$

مثال ۱- رابطه همبستگی به پیمانه ۳، مجموعه \mathbb{Z} را به سه دسته همبستگی (هم ارزی) زیر

افراز می کند.

$$\dots = [-6] = [-3] = [0] = \dots = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$\dots = [-5] = [-2] = [1] = \dots = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$\dots = [-4] = [-1] = [2] = \dots = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

و مجموعه تمام دسته های همبستگی برابر است با $\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$.

مثال ۲- رابطه همبستگی به پیمانه ۷ مجموعه \mathbb{Z} را بدسته های همبستگی زیر افراز میکند.

$$\dots = [-7] = [0] = [7] = \dots = \{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots\}$$

$$\dots = [-6] = [1] = [8] = \dots = \{\dots, -13, -6, 1, 8, 15, \dots\}$$

$$\dots = [-5] = [2] = [9] = \dots = \{\dots, -12, -5, 2, 9, 16, \dots\}$$

$$\dots = [-4] = [3] = [10] = \dots = \{\dots, -11, -4, 3, 10, 17, \dots\}$$

$$\dots = [-3] = [4] = [11] = \dots = \{\dots, -10, -3, 4, 11, 18, \dots\}$$

$$\dots = [-2] = [5] = [12] = \dots = \{\dots, -9, -2, 5, 12, 19, \dots\}$$

$$\dots = [-1] = [6] = [13] = \dots = \{\dots, -8, -1, 6, 13, 20, \dots\}$$

و مجموعه تمام این دسته‌ها عبارتست از: $\mathbb{Z}_7 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]\}$
 اگرچه در دسته‌های هم‌نهشتی هر عدد از یک دسته هم‌نهشتی می‌تواند نماینده آن دسته انتخاب شود ولی معمولاً کوچکترین عدد صحیح غیرمنفی متعلق به هر دسته هم‌نهشتی را به عنوان نماینده انتخاب میکنند.

توجه: بنا به تعریف از $a \equiv b \pmod{m}$ (پیمانه m) نتیجه میشود $a - b$ مضرب m است، یعنی عدد صحیح k موجود است بطوریکه $a - b = mk$ یا $a = b + mk$. یعنی تمام اعداد صحیحی که با b به پیمانه m هم‌نهشتند با افزودن مضربی از m بر b بدست می‌آیند. بنابراین:

$$[b] = \{b + mk : k \in \mathbb{Z}\}$$

مثال: مجموعه تمام اعداد صحیح که به پیمانه ۷ یا عدد ۷ هم‌نهشتند عبارتست از:

$$[7] = \{7 + 7k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -10, -3, 4, 11, 18, \dots\}$$

با توجه به آنچه گفته شد گزاره‌های زیر همگی معادلند.

a به پیمانه m با b هم‌نهشت است.

$a - b$ به پیمانه m هم‌نهشت هستند.

$a \equiv b \pmod{m}$ (پیمانه m)

$$[a] = [b]$$

$a - b$ در یک دسته هم‌نهشتی به پیمانه m قرار دارند.

$a - b$ مضربی است از m .

$$m | a - b$$

توضیح: شرط لازم و کافی برای آنکه $a \equiv b \pmod{m}$ آنست که باقیمانده‌های تقسیم a و b بر m مساوی باشند.

شرط لازم - داریم:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

$$a = mq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < m \quad (1)$$

$$b = mq_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < m \quad (2)$$

نابت می‌کنیم $r_1 = r_2$ ، دو تساوی (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم

$$a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$$

ولی $a \equiv b \pmod{m}$ پس $a - b = mq$ ، لذا:

$$mq = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$$

$$m(q + q_2 - q_1) = r_1 - r_2$$

چون m طرف چپ را می‌شمرد پس طرف راست می‌شمرد یعنی $m | r_1 - r_2$ و حال آنکه طبق

(۱) و (۲) $r_1 - r_2 < m$ و این ممکن نیست مگر آنکه $r_1 - r_2 = 0$ یعنی $r_1 = r_2$.
شرط کافی = داریم:

$$a = mq_1 + r \quad 0 \leq r < m \quad (1)$$

$$b = mq_2 + r \quad 0 \leq r \leq m \quad (2)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم $a \equiv b(m)$ ، (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم

$$a - b = m(q_1 - q_2)$$

که این خود بهنهم $a \equiv b(m)$.

همنهشتی و رابطه تساوی

میدانید که رابطه تساوی در مجموعه اعداد د رای خواص زیر است.

$$1- \text{اگر } a = b \text{ نتیجه میشود، برای هر } a + c = b + c \text{ و } ac = bc$$

$$2- \text{اگر } a + c = b + c \text{ یا } ac = bc \text{ (} c \neq 0 \text{) نتیجه میشود } a = b$$

$$3- \text{اگر } a = b \text{ و } c = d \text{ نتیجه میشود } a + c = b + d \text{ و } ac = bd$$

قضیه‌های زیر نشان میدهند که رابطه همنهشتی نیز دارای خواص مشابهی در \mathbb{Z} است
قضیه الف - اگر $a - b(m)$ آنگاه برای هر عدد صحیح c داریم:

$$a + c \equiv b + c(m) \text{ (پیمانه)}$$

$$b - \text{اگر } a + c \equiv b + c(m) \text{ آنگاه } a \equiv b(m) \text{ (پیمانه)}$$

$$ج - \text{اگر } a \equiv b(m) \text{ و } c \equiv d(m) \text{ آنگاه}$$

$$a + c \equiv b + d(m) \text{ (پیمانه) و } ac \equiv bd(m) \text{ (پیمانه)}$$

$$د - \text{هرگاه } a_1 \equiv b_1(m) \text{ و } a_2 \equiv b_2(m) \text{ و } \dots \text{ و } a_n \equiv b_n(m) \text{ آنگاه}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \dots + b_n(m) \text{ (پیمانه)}$$

$$a_1 a_2 \dots a_n \equiv b_1 b_2 \dots b_n(m) \text{ (پیمانه)}$$

برهان - بهمه دانش آموزان است.

مثال ۱- میدانیم $7 \equiv 2(5)$ ، بنا بر این:

$$(7 \text{ پیمانه } 5) \quad 7 + 7 \equiv 2 + 2(5) \text{ و } (7 \text{ پیمانه } 5) \quad 7 - 7 \equiv 2 - 2(5)$$

$$(7 \text{ پیمانه } 5) \quad 9 \equiv 4(5) \text{ و } (7 \text{ پیمانه } 5) \quad 5 \equiv 0(5)$$

یعنی

$$\text{مثال ۲- میدانیم } (7 \text{ پیمانه } 5) \quad 7 \equiv -8(5) \text{ و } (7 \text{ پیمانه } 5) \quad 10 \equiv -3(5) \text{، بنا بر این:}$$

$$(7 \text{ پیمانه } 5) \quad 7 + 10 \equiv -8 - 3(5) \text{ و } (7 \text{ پیمانه } 5) \quad 7 \times 10 \equiv (-8) \times (-3)(5)$$

$$(7 \text{ پیمانه } 5) \quad 17 \equiv -1(5) \text{ و } (7 \text{ پیمانه } 5) \quad 70 \equiv 0(5)$$

یعنی

نتیجه هرگاه $a \equiv b (m)$ آنگاه برای هر $n \geq 1$ $a^n \equiv b^n (m)$ (پیمانه m)

برهان - با استفاده از (د) قسبه فوق، صحت نتیجه براحتی مشاهده میشود.

پس اگر r باقیمانده تقسیم عدد a بر عدد m باشد آنگاه داریم (پیمانه m) $a \equiv r$ چرا؟

و از آنجا $a^n \equiv r^n (m)$ (پیمانه m)

مثال - مطلوبست باقیمانده 2^{2^2} بر ۱۷

حل: از $2^2 = 4$ و (پیمانه ۱۷) $4 \equiv -1$ نتیجه میشود (پیمانه ۱۷) $4^2 \equiv -1$ اما

(پیمانه ۱۷) $(-1)^2 \equiv 1$ ، یعنی $(2^2)^2 \equiv 1$ (پیمانه ۱۷) $2^{2^2} \equiv 1$

از طرف دیگر داریم: (پیمانه ۱۷) $2^2 \equiv 4$ و در نتیجه داریم.

(پیمانه ۱۷) $2^{2^2} \equiv 2^4 \equiv 16 \equiv -1$

اما (پیمانه ۱۷) $16 \equiv -1$ پس (پیمانه ۱۷) $2^{2^2} \equiv 1$

یعنی باقیمانده 2^{2^2} بر ۱۷، عدد ۱۳ میباشد.

با استفاده از همنهشتی و خواص آن باقیمانده تقسیم اعداد بزرگ بر یک عدد کوچک را براحتی میتوان پیدا نمود.

بعضی مثال چند نمونه مهم را ذکر میکنیم:

قاعده پیدا کردن باقیمانده تقسیم بر ۳ و ۹

فرض میکنیم، $A = \overline{a_n \dots a_1 a_0}$ که در آن حروف a_n, \dots, a_1, a_0 به جای ارقام صفر تا ۹

به کار رفته اند نمایش یک عدد طبیعی در مبنای ۱۰ باشد. میدانیم این عدد برابر است با:

$$A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$$

چون (پیمانه ۹) $10 \equiv 1$ و (پیمانه ۳) $10 \equiv 1$ پس برای هر $k \in \mathbb{N}$

(پیمانه ۹) $10^k \equiv 1$ و (پیمانه ۳) $10^k \equiv 1$

در نتیجه

$$A \equiv a_n \times 1 + a_{n-1} \times 1 + \dots + a_1 \times 1 + a_0 \quad (\text{پیمانه ۹})$$

یا

$$A \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \quad (\text{پیمانه ۹})$$

و همین ترتیب

$$A \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \quad (\text{پیمانه ۳})$$

پس باقیمانده های A و $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ (۳) برابرند. یعنی شریب باقیمانده

تقسیم یک عدد طبیعی بر ۹ (یا ۳) برابر است با باقیمانده مجموع ارقام آن عدد بر ۹ (یا ۳).

قاعده پیدا کردن باقیمانده تقسیم یک عدد بر ۱۱

فرض می کنیم $A = \overline{a_n \dots a_1 a_0}$ نمایش یک عدد طبیعی در مبنای ۱۰ باشد یعنی:

$$A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$$

اما چون (پیمانه ۱۱) $10 \equiv -1$ ، بنابراین برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، (پیمانه ۱۱) $10^k \equiv (-1)^k$ ،
 یعنی اگر k زوج باشد (پیمانه ۱۱) $10^k \equiv 1$ و اگر k فرد باشد (پیمانه ۱۱) $10^k \equiv -1$ ؛ پس:

$$A \equiv a_0 + a_1 \times (-1) + a_2 \times 1 + \dots + a_n \times (-1)^n \quad (\text{پیمانه } 11)$$

یا:

$$A \equiv a_0 - a_1 + a_2 + \dots + a_n (-1)^n \quad (\text{پیمانه } 11)$$

یعنی هرگاه مکان ارقام A را از راست به چپ به نوبت زوج و فرد بگیریم، آنگاه میتوان گفت:
 باقیمانده تقسیم یک عدد طبیعی بر ۱۱ برابر است با باقیمانده عددی که از مجموع ارقام مکانهای
 زوج منهای مجموع ارقام مکانهای فرد آن عدد به دست می آید.

قاعده به دست آوردن باقیمانده یک عدد بر ۵، ۴، ۳

هرگاه $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ یک عدد طبیعی درمبنای ۱۰ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} A &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0 \\ &= 10(a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_1) + a_0 \end{aligned}$$

پس: (پیمانه ۵) $A \equiv a_0$ و (پیمانه ۲) $A \equiv a_0$ و (پیمانه ۱۰) $A \equiv a_0$

یعنی: باقیمانده تقسیم A بر ۱۰ برابر است با رقم سمت راست A و باقیمانده تقسیم A بر ۵ یا ۲
 به ترتیب برابر است با باقیمانده تقسیم رقم سمت راست A بر ۵ یا ۲.

مثال ۱- رقم سمت راست عدد 9^9 را بدست آورید.

حل- طبق آنچه در بالا گفته شد، رقم سمت راست هر عدد برابر است با باقیمانده تقسیم آن

عدد بر ۱۰، بنابراین بایستی باقیمانده تقسیم 9^9 را بر ۱۰ بدست آورد. چون

$$(10 \text{ پیمانه}) 9 \equiv -1 \Rightarrow 9^9 \equiv (-1)^9 (10 \text{ پیمانه}) \Rightarrow 9^9 \equiv -1 (10 \text{ پیمانه})$$

$$-1 \equiv 9 (10 \text{ پیمانه}) \quad \text{اما،}$$

$$9^9 \equiv 9 (10 \text{ پیمانه}) \quad \text{پس:}$$

یعنی عدد 9^9 به رقم ۹ ختم میشود.

مثال ۲- ثابت کنید $9^{10} - 1$ بر ۱۰ بخش پذیر است.

حل- با توجه به مثال ۱ داریم:

$$(10 \text{ پیمانه}) 9^{10} = 9 \times 9^9 \equiv (-1)(-1) (10 \text{ پیمانه}) \equiv 1 (10 \text{ پیمانه})$$

یعنی (پیمانه ۱۰) $9^{10} \equiv 1$ و لذا بنا بر تعریف همبستگی عدد صحیحی مانند k وجود دارد

بطوریکه $9^{10} - 1 \equiv 0 \pmod{10}$ ، یعنی $9^{10} - 1$ بر ۱۰ بخش پذیر است.

مثال ۳- رقم سمت راست عدد $9^{(9)}$ را بدست آورید:

حل طبق مثال ۱ داریم:

$$9^9 \equiv 9 \text{ (پیمانه } 10)$$

ولذا طبق تعریف همبستگی عدد صحیح مانند k یافت میشود به گونه ای که

$$9^9 - 9 = 10k \quad \text{و یا} \quad 9^9 = 10k + 9 \quad \text{بنابراین:}$$

$$9^9 = 9^{(2)} = 9^{10k+9} = 9^{10k} \times 9^9 = (9^{10})^k \times 9^9$$

در نتیجه:

$$9^9 = 9^{(2)} \equiv 1^k \times 9 \text{ (پیمانه } 10) \Rightarrow 9^{(2)} \equiv 9 \text{ (پیمانه } 10)$$

یعنی عدد $9^{(2)} = 9^9$ به ۹ ختم میشود.

تقسیم طرفین با 9 رابطه همبستگی بر عدد طبیعی c

هر گاه $(\text{پیمانه } m) a \equiv b$ آنگاه برای هر عدد صحیح c ، $(\text{پیمانه } m) ac \equiv bc$

اما عکس این مطلب همواره صحیح نیست، بطور مثال:

$$33 \equiv 21 \text{ (پیمانه } 6)$$

ولی

$$\frac{33}{3} \not\equiv \frac{21}{3} \text{ (پیمانه } 6)$$

اما قضیه زیر در این مورد روشن کننده است:

قضیه - در رابطه همبستگی $(\text{پیمانه } m) ac \equiv bc$ داریم:

$$a \equiv b \left(\frac{m}{d} \text{ پیمانه} \right)$$

که در آن $d = (m, c)$

برهان - از فرض نتیجه میشود که عدد صحیح k یافت میشود به گونه ای که:

$$ac - bc = mk$$

یا

$$(a - b)c = mk$$

اگر طرفین این تساوی را بر $d = (m, c)$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$(a - b) \frac{c}{d} = \frac{m}{d} k$$

یعنی عدد صحیح $\frac{m}{d}$ ، عدد $(a - b) \frac{c}{d}$ را می‌شمارد، اما میدانیم $\left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d} \right) = 1$

$$\frac{m}{d} \mid a - b$$

پس

$$a \equiv b \left(\frac{m}{d} \text{ پیمانه} \right)$$

یعنی

مثال - از پیمانۀ ۶ $\equiv 2$ نتیجه می‌شود (پیمانۀ ۳) $4 \equiv 1$.

قضیه - هیچ دو عضوی از مجموعه $X = \{0, 1, 2, 3, \dots, m-1\}$ به پیمانۀ m در Z همبخت نیستند. (m یکعدد طبیعی است)

برهان - طبق فرض، اگر $a, b \in X$ و $a > b$ ، آنگاه $0 \leq a < m$ و $0 \leq b < m$ در نتیجه $0 < a - b < m$ چرا؟ بنابراین $a - b$ مضرب m نیست. یعنی برای هر $k \in Z$ ، $a - b \neq mk$ و یا $a \not\equiv b \pmod{m}$.

نتیجۀ ۱- طبق قضیه فوق، در همبختی به پیمانۀ m در Z ، دسته‌های: $[0], [1], [2], \dots, [m-1]$ دوه‌دو متمایزند. یعنی حداقل m دسته همبختی داریم.

نتیجۀ ۲- هر عدد صحیح a تنها بایک یکی از اعضاء مجموعه $X = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ همبخت است؛ زیرا طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = mq + r \iff a \equiv r \pmod{m} \quad r < m$$

بنابراین تعداد دسته‌های همبختی به پیمانۀ m درست برابر m است.

همانطور که دیدیم، ما مجموعه این دسته‌ها را به Z_m نمایش می‌دهیم:

$$Z_m = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}$$

و عضوهای این مجموعه را در حالت کلی به $[a], [b], \dots, [x], [y]$ نشان می‌دهیم.

دسته کامل مانده‌ها - تعریف - مجموعه‌ای از اعدادی درست:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \quad m \in \mathbb{N}$$

دا یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در همبختی به پیمانۀ m می‌نامیم، در صورتیکه هر یک از عضوهای X یک عضو از یک دسته‌ی همبختی به پیمانۀ m باشد. به عبارت دیگر، اگر ما از هر دسته همبختی به پیمانۀ m یک نماینده انتخاب کنیم مجموعه متشکل از این نماینده‌ها یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در همبختی به پیمانۀ m است.

مثال - طبق آنچه قبلاً دیدیم، مجموعه:

$$C = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در همبختی به پیمانۀ m است.

روشن است که اگر m را به هر یک از اعضاء C بیفزاییم، مجموعه‌ی حاصل، یعنی:

$$\{m, m+1, \dots, 2m-1\}$$

نیز یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در این همبختی است.

مثلاً برای $m = 5$ ، هر یک از مجموعه‌های:

$$\{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ و } \{5, 6, 7, 8, 9\} \text{ و } \{-5, -4, -3, -2, -1\}$$

يك دسته‌ی كامل مانده‌ها در همنهشتی به پیمانۀ ۵ است.

در حالت کلی، قضیه زیر در مورد دسته‌ی كامل مانده‌ها وجود دارد.

قضیه - فرض کنیم $m \in \mathbb{N}$ ، شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه‌ی

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

از عددهای درست، يك دسته‌ی كامل مانده‌ها در همنهشتی به پیمانۀ m باشد آنست که هیچ دو عضو آن به پیمانۀ m همنهشت نباشند. (بنوان تمرین این قضیه را اثبات کنید)

قضیه - فرض کنیم $a, b, m \in \mathbb{N}$ دو عدد درست و a نسبت به m اول باشند اگر $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$

يك دسته‌ی كامل مانده‌ها به پیمانۀ m باشد، آنگاه مجموعه زیر،

$$C_1 = \{ac_1 + b, ac_2 + b, \dots, ac_m + b\}$$

يك دسته‌ی كامل مانده‌ها در این همنهشتی است.

برهان - بنا بر قضیه بالا، کافی است نشان دهیم، هیچ دو عضو این مجموعه‌ها به پیمانۀ

m باهم همنهشت نیستند.

فرض کنیم دو عضو $ac_i + b$ و $ac_j + b$ ، $i \neq j$ ، به پیمانۀ m همنهشت باشند؛ چنین

داریم:

$$ac_i + b \equiv ac_j + b \pmod{m} \Rightarrow ac_i \equiv ac_j \pmod{m}$$

بنا به قضیه خوانده شده، چون $(a, m) = 1$ ، $c_i \equiv c_j$

اما این متناقض است با فرض اینکه C يك دسته‌ی كامل مانده‌ها است.

مثال - اگر $m = 5$ ، $a = 8$ و $b = -3$ ، چون $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ يك دسته‌ی كامل

مانده‌ها است. آنگاه مجموعه:

$$\{8 \times 0 - 3, 8 \times 1 - 3, 8 \times 2 - 3, 8 \times 3 - 3, 8 \times 4 - 3\} \\ = \{-3, 5, 13, 21, 29\}$$

نیز يك دسته‌ی كامل مانده‌ها در همنهشتی به پیمانۀ ۵ است.

حالت خاص: اگر $b = 0$ باشد در این صورت $C_1 = \{ac_1, ac_2, \dots, ac_m\}$ يك

دسته‌ی كامل مانده‌ها به پیمانۀ m است.

مثال - گر $m = 4$ و $a = 5$ باشد آنگاه $\{0, 1, 2, 3\}$ يك دسته‌ی كامل مانده‌ها و

$\{0, 5, 10, 15\}$ نیز يك دسته‌ی كامل مانده‌ها در همنهشتی به پیمانۀ ۴ است:

قضیه فرما - اگر دو عدد a و p نسبت به هم اول باشند (p عددی است اول و $p \nmid a$) آنگاه،

$$ap^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

برهان - می‌دانیم $X = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ يك دسته‌ی كامل مانده‌ها در همنهشتی به

پیمانه p است بنابراین مجموعه :

$$Y = \{0a, 1a, 2a, \dots, (p-1)a\}$$

نیز، بنا بر قضیه بالا، یک دسته کامل مانده‌ها در این هم‌نهشتی است. بنابراین هر عضو X با یک عضو Y به پیمانه p هم‌نهشت است و بالعکس. چون 0 در هر دو مجموعه است، نتیجه می‌شود که هر یک از اعداد $1, 2, \dots, p-1$ درست با یکی از اعداد

$$a, 2a, \dots, (p-1)a$$

هم‌نهشت است و بالعکس. در نتیجه بنا به قضیه خوانده شده داریم:

$$(p \text{ پیمانه}) \quad 1 \times 2 \times \dots \times (p-1) \equiv (1 \times a) \times (2 \times a) \times \dots \times ((p-1)a)$$

$$\text{و با (پیمانه } p) \quad 1 \times 2 \times \dots \times (p-1) \equiv a^{p-1} \times (1 \times 2 \times \dots \times (p-1))$$

چون p و $1 \times 2 \times \dots \times (p-1)$ نسبت به هم اولند داریم:

$$a^{p-1} \equiv 1 \quad (p \text{ پیمانه})$$

نتیجه - برای هر عدد درست a و هر عدد اول p ، (پیمانه p) $a^p \equiv a$

حل معادله در \mathbb{Z}_m

سؤال دیگری که در بحث هم‌نهشتی مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان معادله زیر را در

\mathbb{Z}_m حل کرد:

$$ax \equiv b \quad (1) \quad (m \text{ پیمانه})$$

به عبارت دیگر، آیا می‌توان عدد صحیح x را به گونه‌ای یافت که:

$$ax \equiv b \quad (2) \quad (m \text{ پیمانه})$$

اگر x وجود داشته باشد که در رابطه (۲) صدق کند، آنگاه می‌گوییم معادله هم‌نهشتی (۱)

دارای جواب است.

چند مثال

۱- معادله هم‌نهشتی (پیمانه ۷) $2x \equiv 5$ جواب دارد، زیرا مثلاً $x = 3$ در این رابطه

هم‌نهشتی صدق می‌کند.

۲- معادله هم‌نهشتی (پیمانه ۶) $2x \equiv 1$ جواب ندارد، زیرا اگر فرض کنیم x یک جواب

آن باشد، آنگاه $2x - 1 \equiv 0 \pmod{6}$ ، اما $2x - 1$ عددی است فرد، در صورتیکه مضربهای ۶ همه زوج هستند. بنابراین نمی‌توان عدد x را پیدا کرد که در معادله هم‌نهشتی فوق صدق کند.

مثالهای فوق نشان می‌دهند که معادله هم‌نهشتی (پیمانه m) $ax \equiv b$ ، ممکن است جواب

داشته یا نداشته باشد. اما همانطور که گفته شد این معادله موقعی جواب دارد که x_0 یافت شود به گونه ای که:

$$ax_0 \equiv b \pmod{m} \quad (\text{پیمانه})$$

با $ax_0 - b = mk_0$ و یا اعداد صحیح x_0 و k_0 موجود باشند بطوریکه:

$$ax_0 - b = mk_0$$

$$ax_0 + m(-k_0) = b \quad \text{یا} \quad ax + my = b \quad \text{معادله}$$

دارای جوابهای صحیح باشد، و بالعکس اگر این معادله جواب داشته باشد معادله منتهی فوق هم دارای جواب خواهد بود.

قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله خطی $ax + by = c$ در مجموعه Z جواب داشته باشد آنست که بزرگترین شمارنده مشترک a و b ، عدد c را بشمرد.

برهان - شرط لازم: اگر $ax + by = c$ دارای جواب باشد، یعنی $x_0, y_0 \in Z$ وجود دارند بطوریکه $ax_0 + by_0 = c$ ، اما چون $d|a$ و $d|b$ در نتیجه $d|ax_0 + by_0$ یعنی $d|c$.
 شرط کافی: اگر $(a, b) = d$ و $d|c$ بگه عدد صحیح k یافت میشود، به گونه ای که $c = dk$ و چون d بزرگترین شمارنده مشترک a و b میباشد پس $d = am + bn$ که در آن $m, n \in Z$.

$$c = dk = a(mk) + b(nk) \quad \text{بنابراین:}$$

یعنی اعداد صحیح $x_0 = mk$ و $y_0 = nk$ در معادله $ax + by = c$ صدق میکنند، یعنی $ax + by = c$ دارای جواب میباشد.

قضیه - اگر $(a, b) = d$ و x_0 و y_0 جوابی برای معادله خطی $ax + by = c$ باشد،

$$\text{جواب کلی آن بصورت } x = x_0 + k \frac{b}{d} \text{ و } y = y_0 - k \frac{a}{d} \text{ می باشد که در آن } k \in Z.$$

برهان - توجه کنید که $d|a$ و $d|b$ ، در نتیجه $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ اعداد صحیح هستند و براحتی

$$\text{میتوان دید که } x_0 + k \frac{b}{d} \text{ و } y_0 - k \frac{a}{d} \text{ در معادله } ax + by = c \text{ صدق می کنند.}$$

اما اگر x_1 و y_1 جواب دیگری برای $ax + by = c$ باشد، آنگاه داریم:

$$ax_1 + by_1 = c = ax_0 + by_0$$

$$\Rightarrow a(x_1 - x_0) = -b(y_1 - y_0)$$

یا

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) = -\frac{b}{d}(y_1 - y_0)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{d} \mid \frac{a}{d}(x_1 - x_0)$$

ولی $\left(\frac{a}{d} \text{ و } \frac{b}{d}\right) = 1$ ، در نتیجه $(x_1 - x_0) \cdot \frac{b}{d} \mid$

پس $x_1 = x_0 + k \frac{b}{d}$ و همچنین $y_1 = y_0 - k \frac{a}{d}$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$.

چون x_1 و y_1 دلخواه بود، بنابراین جواب کلی بهمین صورت می باشد.

مثال- معادله $7x + 5y = 10$ را حل کنید.

حل- چون $10 \mid (705)$ ، پس معادله جواب دارد.

اما روش پیدا کردن جواب:

$$7x + 5y = 10 \Rightarrow 5y = 10 - 7x \Rightarrow y = \frac{10 - 7x}{5} = 2 - x - \frac{7x}{5}$$

$$\frac{7x}{5} = k \in \mathbb{Z} \text{ پس}$$

در نتیجه:

$$x = 5k \text{ و } y = \frac{10 - 7(5k)}{5} = 2 - 7k$$

بنابراینجه درقسمت اول حل معادله در \mathbb{Z}_m بیان شد، میتوان ثابت کرد:

قضیه- معادله همبستگی (پیمانه m) $ax \equiv b(m)$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $b \mid (a, m)$.

برهان- اثبات بهمدت دانش آموزان است.

مثال ۱- معادله همبستگی (پیمانه ۵) $7x \equiv 10$ را حل کنید.

حل- (پیمانه ۵) $7x \equiv 10$ جواب دارد اگر و تنها اگر $7x + 5y = 10$ جواب داشته

باشد که حل آن در مثال فوق آمده است و $x = 5k$ جواب معادله همبستگی فوق است.

مثال ۲- معادله همبستگی (پیمانه ۲۳) $72x \equiv 1$ را حل کنید.

معادله جواب دارد زیرا $1 \mid (72 \text{ و } 23)$ بنابراین آن را حل می کنیم.

$$72x - 1 = 23k$$

$$(1) \quad 72x - 23k = 1 \quad \text{و یا:}$$

با استفاده از الگوریتم اقلیدسی يك جواب معادله (۱) بدست می آوریم و سپس آن را

حل می کنیم.

$$(I) \quad 72 = 23 \times 3 + 3$$

$$(II) \quad 23 = 4 \times 5 + 3$$

$$(III) \quad 3 = 72 \times 1 + 1$$

از تساوی (III) نتیجه میشود $1 = 72 - 3 \times 1$ بجای ۳ مقدارش را از تساوی (II) قرار

$$4 \times 6 - 23 \times 1 = 1 \quad \text{و یا} \quad 4 - (23 - 4 \times 5) \times 1 = 1 \quad \text{میدهم:}$$

در این جا بجای ۴ مقدارش را از تساوی (I) قرار میدهیم :

$$(73 - 23 \times 3) \times 6 - 23 \times 1 = 1$$

$$73 \times 6 - 23 \times 19 = 1$$

و یا :

بنابراین $x = 6$ و $k = 19$ يك جواب معادله (۱) است و يكمك این جواب و استفاده

از قضیه قبل جوابهای معادله بدست می آید و $x = 23n + 6$ و $n \in \mathbb{Z}$ است.

تمرین

۱- هرگاه a یکمعد صحیح باشد نشان دهید که a^2 عضوی از دسته همبشتی $[0]$ یا $[1]$ با

پیمانه ۲ یا ۳ است.

۲- ثابت کنید برای هر دو عدد صحیح a و b داریم :

$$(ab \text{ پیمانه } a) \quad (a+b)^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod{a}$$

$$(ab \text{ پیمانه } b) \quad (a+b)^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod{b}$$

۳- ثابت کنید $1 + 2^{22} \mid 641$ (از راه همبشتی)

۴- باقیمانده تقسیم 20^{415} بر ۷ و 41^{75} بر ۳ و 3^{200} بر ۱۰۱ را بدست آورید.

۵- ثابت کنید $1 + 2^{37} \mid 223$ (از راه همبشتی)

۶- ثابت کنید عدد 9^9 از سمت راست به ۸۹ ختم می شود.

۷- ثابت کنید اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n \mid m$ (پیمانه n) آنگاه $a \equiv b \pmod{n}$.

۸- اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $a \equiv b \pmod{n}$ (پیمانه n) و $a \equiv b \pmod{(m,n)}$ آنگاه $a \equiv b \pmod{mn}$.

و از آنجا نتیجه نگیرید $6 \mid n$ اگر فقط اگر $2 \mid n$ و $3 \mid n$.

۹- آیا گروه زیر درست است؟

$$a^n \equiv b^n \pmod{m} \implies a \equiv \pm b \pmod{m} \quad (\text{پیمانه } m)$$

۱۰- ثابت کنید اگر $a \equiv b \pmod{m}$ آنگاه $(a, m) = (b, m)$

۱۱- تحقیق کنید (از راه همبشتی) که $1 + 27 \mid 1000 - 1$ و $27 \mid 1000 - 1$ و از آنجا

قانونی برای بخش پذیری بر ۲۷ و ۳۷ دکر کنید.

۱۲- ما استفاده از (پیمانه ۱۳) $3 \equiv -10$ و (پیمانه ۱۳) $(-3)^n \equiv 10^n$ و (پیمانه ۷)

$3 \equiv 10$ و (پیمانه ۷) $3^n \equiv 10^n$ قانون بخش پذیری بر ۷ و ۱۳ را بدست آورید.

۱۳- نشان دهید که باقیمانده تقسیم عدد 567954 بر ۷ برابر است با باقیمانده $567-954$

آیا می توان قانونی برای بخش پذیری بر ۷ در بن زمید بیان کرد؟

۱۴- کدام يك از مجموعه‌های زیر يك دسته کامل مانده، به‌یمنانه ۱۱ است.

الف - $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$

ب - $\{5, 3, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5\}$

۱۵- آیا مجموعه $\{n | 0 \leq n \leq 16\}$ يك دسته کامل مانده‌ها به‌یمنانه ۱۷ است؟

۱۶- آیا مجموعه $\{n | 0 \leq n \leq 6\}$ يك دسته کامل مانده‌ها به‌یمنانه ۷ است؟

۱۷- اگر باقیمانده تقسیم عددی ۶۸ و ۱۴۵ بر m دو عدد مساوی باشند ($m \neq 1$) m و r را تعیین کنید.

۱۸- ثابت کنید.

الف - باقیمانده هر عدد بر ۲ (یا ۲۵)، در ترتیب عبارتست از باقیمانده عدد حاصل از دو رقم سمت راست آن بر ۴ (یا ۲۵).

ب - باقیمانده هر عدد بر ۸ (یا ۱۲۵)، در ترتیب عبارتست از باقیمانده عدد حاصل از سه رقم سمت راست آن بر ۸ (یا ۱۲۵).

۱۹- باقیمانده 2^{512} را بر ۵ پیدا کنید.

۲۰- باقیمانده‌های تقسیم اعداد $2^{6n} - 3^{6n}$ بر 35 و $2^{3n-1} \times 7^n + 3^{2n} - 2$ را بر 29 بدست آورید.

۲۱- ثابت کنید $2^{4n} - 1$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

۲۲- ثابت کنید $2^{120} - 1$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است.

۲۳- اگر $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$ يك عدد طبیعی باشد، نشان دهید شرط لازم و کافی برای آن که A بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد آن است که $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + 2a_1 - 2a_2$ بر 12 بخش‌پذیر باشد.

۲۴- نشان دهید که باقیمانده تقسیم عدد 25396 بر ۱۱ برابر است با باقیمانده حاصل جمع $2 + 53 + 96$ بر ۱۱.

۲۵- نشان دهید که عدد $2^{38} + 17$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است.

۲۶- رقم‌های سمت راست اعداد 3^{424} و 7^{18} را بدست آورید.

۲۷- باقیمانده تقسیم عدد 2^{2691} را بر ۷ بدست آورید.

۲۸- معادلات زیر را در \mathbb{Z} حل کنید:

الف - $x + y = 1$ ب - $6x + 8y = 7$

ج - $57x - 87y = 342$ د - $24x + 138y = 18$

۲۹- معادلات همبستگی زیر را حل کنید:

الف - $5x = 3(54x)$ ب - $7x = 1$ (یمنانه ۴)

ج- $2x \equiv 2$ (پیمانه ۶) د- $2x \equiv 3$ (پیمانه ۷)

ه- $2x + 1 \equiv 2(x - 1)$ (پیمانه ۸)

۳۰- ثابت کنید (پیمانه ۷) $n^7 \equiv n$ و از آنجا نتیجه بگیرید $5^7 + 4^7 + 3^7 + 2^7$ بر ۷

بخش پذیر است.

۳۱- ثابت کنید (پیمانه ۱۳) $n^{13} \equiv 1$ هرگاه $(n, 13) = 1$

۳۲- ثابت کنید $m^{16} - n^{16}$ بر ۱۷ بخش پذیر است. هرگاه $(n, 17) = 1$ و $(m, 17) = 1$

۳۳- اعداد صحیح مانند x و y پیدا کنید به صورتی که

$$(357, 629) = 357x + 629y$$

۳۴- دو عدد مثبت را چنان تعیین کنید که یکی مضرب ۷ و دیگری مضرب ۱۳ بوده و

مجموع آنها ۷۴ باشد.

۳۵- ثابت کنید

$$n(n+1)(2n+1)(2n^2-2n+1) \equiv 0 \quad (\text{پیمانه } 30)$$

۳۶- آیا $f(n) = n^2 - n + 41$ برای هر عدد طبیعی n یک عدد اول می دهد؟

۳۷- آیا $g(n) = n^2 - 79n + 1601$ برای هر عدد طبیعی n یک عدد اول می دهد؟

۳۸- هرگاه $M_n = 2^n$ (عدد مرس) اول باشد ثابت کنید n اول است.

۳۹- هرگاه $\Gamma_n = 2^n + 1$ (عدد فرما) اول باشد آنگاه n توانی از ۲ است.

۴۰- ثابت کنید $1 - (2n+7)$ و $1 - (6n+10)$

۴۱- رقم یکان عدد $17^{8k+4} + 7^{4k+2}$ را پیدا کنید.

۴۲- ثابت کنید $6 | a(a^2 + 11)$

ماتریسها

بطوری که می دانید ، آرایشی از اعداد حقیقی به صورت :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

را يك ماتریس می نامند . اعداد $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$ را درایه های یا عضوهای ماتریس A می خوانند ، دو حالت کلی ، يك درایه از A را به صورت a_{ij} نشان می دهیم که i نماینده سطر و j نماینده ستونی است که این عضو در محل تلاقی آنها واقع می باشد . مثلاً ، درایه ای است که در ملاقی سطر اول و ستون اول یا a_{11} درایه ای در تلاقی سطر دوم و ستون سوم و a_{mn} درایه ای در تلاقی سطر m و ستون n است .

ماتریس A که دارای m سطر و n ستون است يك ماتریس $m \times n$ (بخوانید ماتریس m در n) با يك ماتریس مرتبه $m \times n$ نامیده میشود و برای سادگی آنرا به صورت زیر نمایش می دهند :

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

در مواردی که مرتبه ماتریس A معلوم باشد مختصراً می نویسیم : $A = [a_{ij}]$ درگاه در این ماتریس داشته باشیم $m = n$ ، آنگاه A را يك ماتریس مربعی مرتبه n می نامند در يك ماتریس مربعی مرتبه n ، عضوهای $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{21}, \dots, a_{nn}$ را اعضای قطراسی ماتریس می نامند .

می توان دید که بین مجموعه ماتریسهای مربعی مرتبه n و مجموعه اعداد حقیقی يك تناظر يك به يك وجود دارد . لذا به جای هر ماتریس مربعی مرتبه n می توان عدد حقیقی که درایه آن ماتریس است قرار داد . بنابراین $[a_{11}] = a_{11}$. به طور کلی ، هر بردار n تایی را هم می توان بصورت يك ماتریس $1 \times n$ در نظر گرفت .

اساوی دوماتریس

دوماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ مساوی می نامند و می نویسند $A = B$ ،

هرگاه برای هر i و j داشته باشیم ، $a_{ij} = b_{ij}$. یعنی :

$$(A=B) \Leftrightarrow (\forall i,j, a_{ij}=b_{ij})$$

بعبارت دیگر ، دو ماتریس A و B را مساوی گوئیم ، هرگاه درایه‌های متناظر آنها مساوی باشند.

جمع ماتریسها و خواص مربوط به آن

برای هر دو ماتریس مرتبه $m \times n$ ، $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ ، ماتریس $C = [c_{ij}]$ را ، که در آن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ، حاصل جمع ماتریس A با ماتریس B می‌نامند و آن را به صورت $C = A + B$ نشان می‌دهند . بعبارت دیگر داریم :

$$(C = A + B) \Leftrightarrow (\forall i,j, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}) \quad (۱)$$

مثال :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+0 \\ -2+2 & -1+1 \\ 3-2 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

باید توجه داشت که ، دو ماتریس A و B را وقتی می‌توان باهم جمع کرد که هم مرتبه باشند . در این صورت ، اصطلاحاً گوئیم B و A جمع پذیرند . همچنین روشن است که دو تعریف (۱) ماتریس C از مرتبه $m \times n$ است . یعنی ، هرگاه مجموعه ماتریسهای $m \times n$ را با $M_{m \times n}$ نمایش دهیم داریم $C \in M_{m \times n}$ ، بنابراین مجموعه $M_{m \times n}$ نسبت به عمل $+$ بسته است . علاوه بر این عمل $+$ در مجموعه $M_{m \times n}$ دارای ویژگیهای زیر است :

$$\forall A, B \in M_{m \times n} \text{ و } A + B = B + A \quad \text{الف -}$$

$$\forall A, B, C \in M_{m \times n} \text{ و } A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{ب -}$$

$$\forall A, B, C \in M_{m \times n} \text{ و } (A + C = B + C) \Leftrightarrow (A = B) \quad \text{ج -}$$

اثبات - اگر $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$ و $C = [c_{ij}]$ ماتریسهای $m \times n$ باشند

تو خواهیم داشت :

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$

الف -

$$= [a_{ij} + b_{ij}]$$

تعریف جمع دو ماتریس -

$$= [b_{ij} + a_{ij}]$$

خاصیت جابجایی جمع اعداد حقیقی :

$$= [b_{ij}] + [a_{ij}]$$

تعریف جمع دو ماتریس :

$$A + B = B + A$$

$$\begin{aligned}
 A + (B + C) &= [a_{ij}] + [(b_{ij}) + (c_{ij})] && \text{ب -} \\
 &= [a_{ij}] + [(b_{ij} + c_{ij})] && \text{تعریف جمع دو ماتریس :} \\
 &= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] && \text{تعریف جمع دو ماتریس :} \\
 &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] && \text{فرکت پذیری جمع در اعداد حقیقی :} \\
 &= [(a_{ij} + b_{ij})] + [c_{ij}] && \text{تعریف جمع دو ماتریس :} \\
 &= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] && \text{تعریف جمع دو ماتریس :} \\
 &= (A + B) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A + C) = (B + C) &\Leftrightarrow [(a_{ij} + c_{ij})] = [(b_{ij} + c_{ij})] && \text{ج -} \\
 &\Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j && \text{قانون حذف در جمع اعداد حقیقی :} \\
 &\Leftrightarrow A = B
 \end{aligned}$$

در مجموعه $M_{m \times n}$ ، ماتریسی را که تمام عضوهای آن صفر است ماتریس صفر می نامیم و آن را با $O_{m \times n}$ یا \bar{O} نمایش می دهیم. روشن است که برای هر ماتریس $A \in M_{m \times n}$ ، داریم:

$$A + \bar{O} = A$$

بنابراین \bar{O} ، عضو بی اثر عمل جمع در مجموعه $M_{m \times n}$ است.

وارون ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نسبت به عمل $+$ ، ماتریس $A_1 = [-a_{ij}]_{m \times n}$ است زیرا داریم:

$$\begin{aligned}
 A + A_1 &= [a_{ij}] + [-a_{ij}] \\
 &= [a_{ij} + (-a_{ij})] \\
 &= [0] \\
 &= \bar{O}
 \end{aligned}$$

ماتریس A_1 را به $-A$ نشان می دهیم و آن را وارون جمعی یا قرینه ماتریس A می نامیم. روشن است که هر ماتریس $A \in M_{m \times n}$ دارای یک قرینه است.

برای هر دو ماتریس هم مرتبه A و B ، ماتریس $A + (-B)$ را به $A - B$ نشان داد، آن را تفاضل دو ماتریس A و B می نامیم.

نتیجه - مجموعه ماتریسهای $M_{m \times n}$ با عمل $+$ یک گروه آبدی است.

ضرب یک عدد در یک ماتریس (ضرب اسکالر)

برای هر ماتریس $A \in M_{m \times n}$ و $r \in R$ ، ماتریس مرتبه $m \times n$ ، $[ra_{ij}]$ را حاصل ضرب عدد r در A خوانده آن را به rA نشان می دهیم یعنی:

$$rA = [ra_{ij}]$$

بمعاد دیگر: rA از ضرب هر درایه A در عدد حقیقی r به دست می آید.

اگر B و A دو ماتریس هم‌مرتبه و r و s اعداد حقیقی باشند، به‌سادگی می‌توان نشان داد که :

$$r(A+B) = rA + rB \quad \text{الف -}$$

$$(r+s)A = rA + sA \quad \text{ب -}$$

$$r(sA) = (rs)A \quad \text{ج -}$$

$$1A = A \quad \text{د -}$$

ممکنه اینها به‌سادگی ثابت می‌شوند، برای نمونه یکی از آنها را ثابت می‌کنیم :

$$(r+s)A = (r+s)[a_{ij}] \quad \text{اثبات ب -}$$

$$= [(r+s)a_{ij}] \quad \text{تعریف ضرب اسکالر :}$$

$$= [ra_{ij} + sa_{ij}] \quad \text{خاصیت پخش اعداد حقیقی}$$

$$= [ra_{ij}] + [sa_{ij}] \quad \text{تعریف جمع ماتریسها}$$

$$= r[a_{ij}] + s[a_{ij}] \quad \text{تعریف ضرب اسکالر :}$$

$$(r+s)A = rA + sA$$

نماد Σ (سیگما)

معمولاً، برای سادگی مجموع اعداد حقیقی

$$a_1 \text{ و } a_2 \text{ و } a_3 \text{ و } \dots \text{ و } a_n \quad (۱)$$

را با استفاده از نماد Σ بصورت :

$$\sum_{i=1}^n a_i \quad (a_i \text{ جمله عمومی نامیده می‌شود})$$

نشان می‌دهند. حرف i متغیری است که دامنه تغییرات آن مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ است.

تساوی $i=1$ در زیر نماد Σ بدین معناست که اولین مقدار i عدد ۱ است و عدد n در بالای Σ

یعنی آخرین مقدار i عدد n می‌باشد. عبارت دیگر، نماد $\sum_{i=1}^n$ نشان‌دهنده این است که i

اعداد دوست از ۱ تا n را اختیار می‌کند. بنابراین :

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

چند مثال :

$$\sum_{i=1}^6 a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \quad -۱$$

۲- برای هر عدد طبیعی n ،

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

۳- برای هر عدد طبیعی n ،

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

یعنی مجموع اعداد طبیعی از یک تا n ،

۴- برای هر عدد طبیعی n ،

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

۵- در تعریف میانگین n اندازه آماری داشتیم :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \\ &= \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \end{aligned}$$

ویژگیهای Σ

۱- برای هر عدد ثابت k داریم :

$$\sum_{i=1}^n k a_i = k \sum_{i=1}^n a_i$$

زیرا می توان نوشت :

$$\sum_{i=1}^n k a_i = k a_1 + k a_2 + \dots + k a_n$$

تعریف Σ :

$$= k(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

خاصیت پخش اعداد حقیقی :

$$= k \sum_{i=1}^n a_i$$

تعریف Σ :

مثلاً $\sum_{i=1}^n k = nk$ ، زیرا کافی است در ویژگی (۱)؛ a_i را مساوی ۱ قرار دهیم .

۲- داریم :

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

زیرا :

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) : \text{تعریف } \Sigma$$

شرکت پذیری و جابجایی + در R :

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i : \text{تعریف } \Sigma$$

ویژگی (۲) قابل تعمیم می باشد . یعنی :

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i + \dots + x_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i + \dots + \sum_{i=1}^n x_i$$

۳- داریم :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

زیرا :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{i=1}^n (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})$$

تعمیم ویژگی (۲)

$$= \sum_{i=1}^n a_{i1} + \sum_{i=1}^n a_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^n a_{im}$$

تعریف Σ :

$$= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

نمونه

۱- هر يك از عبارات زیر را با استفاده از نماد Σ بنویسید .

$$1 + 2 + 3 + \dots + (2n - 1)$$

$$(1 \times 2) + (2 \times 3) + \dots + n(n+1)$$

$$2t + 4t^2 + 8t^3 + 16t^4 + 32t^5 + 64t^6$$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \dots + (x_p + y_p) + y_{p+1},$$

$$(x_1 - m)(y_1 - n) + (x_2 - m)(y_2 - n) + \dots + (x_p - m)(y_p - n)$$

ویژگی ۲ از Σ :

$$= \sum_{j=1}^n (a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{mj})$$

اما مجموع داخل پرانتز ، مجموع درایه‌های ستون j ام A است و خود طبق آنچه دیدیم

$$= \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

بنابراین داریم :

$$A \text{ مجموع درایه‌های } = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \quad (۱)$$

ب : مجموع درایه‌های هر ستون را حساب کرده سپس مجموع این مجموع‌ها را حساب کنیم :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & & & \\ + & + & \dots & + & & & \\ \hline \sum_{i=1}^m a_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{in} & & & \end{array}$$

پس :

$$A \text{ مجموع درایه‌های } = \sum_{i=1}^m a_{i1} + \sum_{i=1}^m a_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^m a_{in}$$

$$= \sum_{i=1}^m (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}) \quad \text{ویژگی ۲ از } \Sigma$$

مجموع داخل پرانتز ، مجموع درایه‌های سطر i ام است که خود برابر $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ است ،

لذا داریم :

$$A \text{ مجموع درایه‌های } = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (۲)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$ را يك مجموع دو گانه می‌نامیم . در مجموعه‌های دو گانه ترتیب گذاشتن

اندیسهای Σ بی‌اثر است و این خود یکی دیگر از ویژگیهای Σ است که قبلا دیدیم.

ضرب ماتریسها

اگر $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ دو ماتریس باشند، می‌توان ماتریس جدید:

$$C = [c_{ij}]_{m \times n}$$

را چنین تعریف کرد:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1k}b_{k1} + \dots + a_{1p}b_{p1} = \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{k1}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + \dots + a_{1k}b_{k2} + \dots + a_{1p}b_{p2} = \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{k2}$$

$$c_{ij} = a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + a_{13}b_{3j} + \dots + a_{1k}b_{kj} + \dots + a_{1p}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{kj}$$

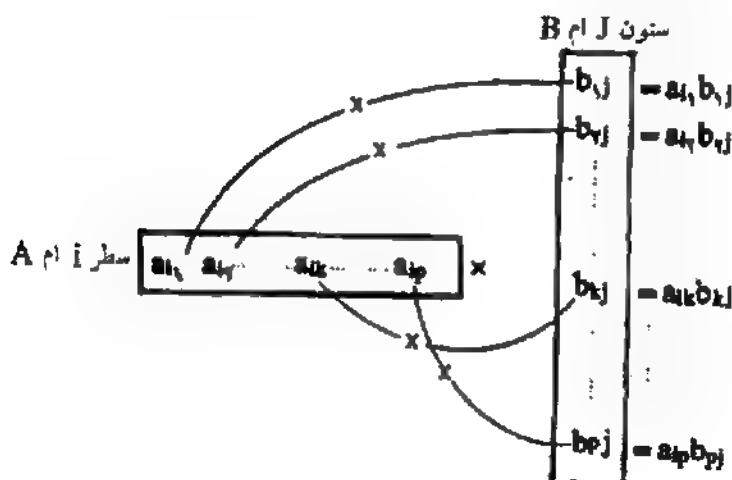
$$c_{ij} = a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + a_{13}b_{3j} + \dots + a_{1k}b_{kj} + \dots + a_{1p}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{kj}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{kj}$$

یعنی:

ماتریس C را حاصلضرب ماتریس A دو ماتریس B می‌نامیم و آن را به $A \times B$ یا AB

نشان می‌دهیم. درایه c_{ij} از ماتریس حاصلضرب مطابق نمودار زیر به دست می‌آید:



هرگاه $i=1, j=2$ ، سطر اول ماتریس A را در ستون اول ماتریس B ، نظیر به نظیر ضرب کرده باهم جمع می‌کنیم تا درایه سطر اول و ستون اول حاصلضرب به دست آید.

به طور کلی برای یافتن درایه حاصلضرب سطر i ام در ستون j ام درایه‌های سطر i ام ماتریس A را نظیر به نظیر در درایه‌های ستون j ام ماتریس B ضرب کرده اعداد حاصل را باهم جمع می‌کنیم.

مثال :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 0 + 0 \times -1 + (-1) \times 0 & 2 \times -1 + 0 \times 0 + (-1) \times 0 \\ 0 \times 0 + 3 \times -1 + 1 \times 0 & 0 \times -1 + 3 \times 0 + 1 \times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف - هرگاه A یک ماتریس مربعی باشد، نگاه $A^{-1} = A^{-1}$ و $A^0 = A \cdot A^{-1}$ ، $(n \in \mathbb{N})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس همانی (واحد)
ماتریس مربعی :

که درایه‌های قطر اصلی آن ۱ و سایر درایه‌های آن صفر است ماتریس همانی می‌نامیم و آن را به I_n یا I نشان می‌دهیم. روشن است که اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد داریم :

$$A \times I_n = I_n \times A = A \quad (1)$$

بمبارت دیگر، I_n عضو بی اثر عمل ضرب در مجموعه ماتریسهای مربعی مرتبه n (مجموعه $M_{n \times n}$) است.

برای هر ماتریس $A = [a_{ij}]_{n \times r}$ چنین داریم :

$$I_{n \times n} \times A_{n \times r} = A_{n \times r} \quad (2)$$

$$A_{n \times r} \times I_{r \times r} = A_{n \times r} \quad (3)$$

در اینجا $I_{n \times n}$ را ماتریس همانی چپ A و $I_{r \times r}$ را ماتریس همانی راست A می نامند.

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

توجه

الف- مثل زیر نشان می دهد، که عمل ضرب ماتریسها دارای خاصیت جابجایی نیست:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & +3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ب- همچنین مثال زیر نمایان می سازد که می گن اسـه حاصل ضرب دو ماتریس، ماتریس صفر شود بدون آنکه هیچکدام از آنها ماتریس صفر باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ج- مثال زیر نشان می دهد که دستور حذف در ضرب ماتریسها برقرار نیست.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

بامقایسه (۱) و (۲) دیده می شود که $AB=AC$ ولی می بینیم که $B \neq C$.

ویژگی های عمل ضرب:

۱- ضرب ماتریسها شرکت پذیر است:

اگر فرض کنیم $A=[a_{ik}]_{m \times n}$ و $B=[b_{kl}]_{n \times p}$ و $C=[c_{lj}]_{p \times r}$ آنگاه بنا به

تعریف ضرب ماتریسها خواهیم داشت:

$$(AB)C = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} \right]_{m \times p} \left[c_{lj} \right]_{p \times r}$$

و اگر فرض کنیم $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} = d_{il}$ آنگاه می توان نوشت:

$$(AB)C = \left[d_{il} \right]_{m \times p} \left[c_{lj} \right]_{p \times r} = \left[\sum_{l=1}^p d_{il} c_{lj} \right]_{m \times r} = \left[\sum_{l=1}^p c_{lj} d_{il} \right]_{m \times r}$$

$$(AB)C = \left[\sum_{l=1}^p c_{lj} \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} \right]$$

بدی d_{il} مساویش را قرار میدهیم:

و چون c_{lj} به k بستگی ندارد بنا بر خاصیت Σ می توانیم بنویسیم:

$$(AB)C = \left[\sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n c_{lj} (a_{ik} b_{kl}) \right]$$

و چون Σ ها دارای خاصیت جابجائی هستند می توان نوشت:

$$(AB)C = \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p c_{lj} (a_{ik} b_{kl}) \right] = \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p (a_{ik} b_{kl}) c_{lj} \right]$$

$$(AB)C = \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{ik} (b_{kl} c_{lj}) \right]$$

و یا:

و چون a_{ik} به l بستگی ندارد خواهیم داشت:

$$(AB)C = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} \sum_{l=1}^p b_{kl} c_{lj} \right] = \left[a_{ik} \right] \left[\sum_{l=1}^p b_{kl} c_{lj} \right]$$

$$(AB)C = A(BC)$$

و یا:

یعنی ضرب ماتریسها شرکت پذیر است.

۲- ضرب ماتریسها نسبت به جمع دارای خاصیت بخشش است. به عنوان هرگاه $A=[a_{ik}]_{m \times n}$

$$A(B+C) = AB+AC$$

داریم: $C=[c_{kj}]_{n \times p}$ و $B=[b_{kj}]_{n \times p}$

برای اثبات درستی تساوی بالا، $(B+C)$ را در حکم یک ماتریس فرض کرده، آنگاه تعریف

ضرب دو ماتریس را برای A و $(B+C)$ بکار می بریم:

$$A(B+C) = [a_{ik}]_{m \times n} \times ([b_{kj}]_{n \times p} + [c_{kj}]_{n \times p})$$

$$= [a_{ik}]_{m \times n} \times [(b_{kj} + c_{kj})]_{n \times p}$$

تعریف جمع ماتریسها:

$$= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \right]_{m \times p} \quad \text{تعریف ضرب ماتریسها :}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} \right]_{m \times p} \quad \text{و به‌گی ۲ نماد } \Sigma :$$

$$= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right]_{m \times p} + \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} \right]_{m \times p} \quad \text{جمع ماتریسها :}$$

$$= AB + AC \quad \text{تعریف ضرب ماتریسها :}$$

همچنین هرگاه جمع و ضرب ماتریسهای D ، E و F را دوامال بکار برده شده شدنی فرض بگیریم داریم :

$$(D+E)F = DF + EF$$

چند نوع ماتریس خاص

۱- ماتریس ترانهاده (جابجا شده)

تعریف - هرگاه در ماتریس $A = [a_{ij}]$ ، جای سطرها و ستونها را عوض کنیم ماتریس دیگری به‌دست می‌آید که آن را ترانهاده A می‌نامیم ترانهاده ماتریس A را به A' نشان می‌دهیم .

$$A' = [a'_{ij}] \quad a'_{ij} = a_{ji} \quad \text{مثال :}$$

$$1- \text{ماتریس ترانهاده } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{عبارتست :}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2- \text{ماتریس ترانهاده } C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \text{عبارتست از :}$$

$$C' = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

عمل ترانهاده کردن دو ماتریسها ، تابعی به‌صورت :

$$A \rightarrow A'$$

تعریف می‌کند که آنرا تابع ترانهاده می‌نامند .

۲- ماتریس قطری = ماتریس مربعی :

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$

ر که در آن درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی همگی صفر باشد ، ماتریس قطری می‌نامند. به عبارت

دیگر ، $D = [d_{ij}]_{n \times n}$ يك ماتریس قطری است اگر و فقط اگر

$$d_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$\text{مثال ۱-} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \text{ يك ماتریس قطری است .}$$

$$\text{مثال ۲-} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \text{ يك ماتریس قطری است .}$$

هرگاه در ماتریس قطری، تمام درایه‌های قطر اصلی مساوی باشند، ماتریس را اسکالر می‌خوانند.

$$S = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}$$

روشن است که داریم $S = aI_n$.

۳- ماتریسهای بالامثلی و پائین مثلثی

ماتریس مربعی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

که در آن درایه‌های واقع در زیر قطر اصلی همگی صفرند را ماتریس بالامثلی می‌نامند. به عبارت

دیگر $A = [a_{ij}]$ يك ماتریس بالامثلی است هرگاه برای هر $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$.

بطریق مشابه ماتریس مربعی $B = [b_{ij}]$ يك ماتریس پائین مثلثی است هرگاه درایه‌های

واقع در بالای قطر اصلی آن همگی صفر باشند یعنی برای هر $i < j$ داشته باشیم $b_{ij} = 0$.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

چند مثال :

الف - ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0/5 \\ 0 & 0 & 0/3 \end{bmatrix}$ ، يك ماتریس بالا مثلثی است .

ب - ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، يك ماتریس پائین مثلثی است .

ج - I_n بالامثلی و پائین مثلثی است (چرا؟)

د - ماتریس \bar{O} ، هم بالامثلی و هم پائین مثلثی است (چرا ؟)

۴- ماتریس متقارن - ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ را متقارن خوانیم هرگاه داشته

باشیم :

$$\forall i, j \quad a_{ij} = a_{ji}$$

یعنی دریه‌ای که در سطر i ام و ستون j ام واقع است برابر دریه‌ای است که در سطر j ام و ستون i ام قرار گرفته است.

واضح است که A ماتریس متقارن است اگر و تنها اگر $A = A'$. چرا؟
مثال ۱- ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

متقارن است زیرا داریم $a_{12} = a_{21}$ ، $a_{13} = a_{31}$ ، ...

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

۵- ماتریس پاد متقارن (ضدمتقارن) - ماتریس مربع $A = [a_{ij}]$ را پاد متقارن خوانند هرگاه داشته باشیم:

$$\forall i, j \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

$$A = -A'$$

یا

از این تعریف بلافاصله نتیجه می‌شود که درایه‌های قطری این ماتریس تماماً صفر است. زیرا، هیچ عددی غیر از صفر با قرینه‌اش برابر نیست. در زیر دو ماتریس پادمتقارن نوشته شده است.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

واضح است که $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ماتریس پادمتقارن است اگر و تنها اگر $A' = -A$ چرا؟

ویژگی‌های عمل توانه‌کردن در ماتریسها

الف -

$$(A')' = A$$

ب -

$$(A+B)' = A' + B'$$

ج - $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda A)' = \lambda A'$$

د -

$$(AB)' = B'A'$$

اثبات (الف) تا (ج) ساده است. ویژگی «د» را ثابت می‌کنیم:

هرگاه $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ ، $A' = [a'_{ij}]$ و $B' = [b'_{ij}]$ که در آن:

$$a'_{ij} = a_{ji} \text{ و } b'_{ij} = b_{ji}$$

در نتیجه : $B'A' = [d_{ij}]$ که در آن :

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \quad (1)$$

اما $(AB)' = [c'_{ij}]$ که در آن $c'_{ij} = c_{ji}$ و بتایه تعریف c_{ji} داریم :

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \quad (2)$$

با مقایسه (۱) و (۲) و تعریف تساوی دوماتریس درستی تساوی قضیه ثابت می شود .

مثال - هرگاه ، $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ و $\lambda = 3$ ، آنگاه درستی

ویژگیهای الف ، ج و د را تحقیق کنید .

الف - $A' = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$ و $(A')' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

ج - $3A = \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \end{bmatrix}$

$(3A)' = \begin{bmatrix} 3a & 3d \\ 3b & 3e \\ 3c & 3f \end{bmatrix}$

$3A' = \begin{bmatrix} 3a & 3d \\ 3b & 3e \\ 3c & 3f \end{bmatrix}$

د - داریم :

$A' = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$ و $B' = \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+br+ct & aq+bs+cu \\ dp+er+ft & dq+es+fu \end{bmatrix}$

$(AB)' = \begin{bmatrix} ap+br+ct & dp+er+ft \\ aq+bs+cu & dq+es+fu \end{bmatrix}$

$$B'A' = \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+br+ct & dp+er+ft \\ aq+bs+cu & dq+es+fu \end{bmatrix}$$

با مقایسه دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

$$(AB)' = B'A'$$

تقریب

در مسائل این بخش از حروف بزرگ ابعاد برای نمایش ماتریسها استفاده شده و اعمال بکار رفته امکان‌پذیر می‌باشند.

$$(A+B)-C=A+(B-C) \quad ۱- \text{ ثابت کنید:}$$

۲- ضربهای زیر را انجام دهید

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \quad \text{الف -}$$

$$\begin{bmatrix} d_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & d_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & d_۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & d_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & d_۳ \end{bmatrix} \quad \text{ب -}$$

آیا می‌توان قانون کلی در ضرب يك ماتریس در ماتریس قطری بیان کرد؟

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \quad \text{ج -}$$

۳- هرگاه

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید که:

$$(AB)C = A(BC)$$

۴- ثابت کنید هرگاه r و s اعداد حقیقی باشند داریم:

$$rA = \vec{0} \Rightarrow r = ۰ \text{ یا } A = \vec{0} \quad \text{الف -}$$

$$rA = rB \Rightarrow A = B \quad (r \neq ۰) \quad \text{ب -}$$

$$rA + sB = rs(AB) \quad \text{ج -}$$

$$(-A)(-B)=AB \quad \text{د-}$$

$$A(rB)=(rA)B=r(AB) \quad \text{ه-}$$

۵- تحت چه شرایطی $ABCD$ (حاصلضرب φ ماتریس) قابل تعریف است.

۶- مستقیماً ثابت کنید :

$$(D+E)F=DF+EF$$

$$\text{۷- هرگاه } A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}, \text{ مطلوبست محاسبه } A^n, \dots, A^2, A^1, A^0$$

۸- در ماتریسهای زیر a, b, c و d درجه شرایطی باید صدق کند تا ضرب دوماتریس

ج. معنائی باشد .

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{۹- هرگاه } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تساوی $AB=BA$ برقرار است ؟

۱۰- هرگاه $AB=BA$ ، ثابت کنید که :

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

۱۱- هرگاه A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد ثابت کنید :

$$A^2 - I^2 = (A+I)(A-I) = (A-I)(A+I) \quad \text{الف-}$$

$$A^2 + I^2 = (A+I)(A^2 - A + I) \quad \text{ب-}$$

۱۲- برای چه مقادیری از x تساوی زیر درست است .

$$[x \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\text{۱۳- هرگاه } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ثابت کنید :}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix} \quad (n \text{ عدد طبیعی است})$$

۱۴- هرگاه n عددی طبیعی باشد، باروش استقراء ثابت کنید .

$$AB=BA \Rightarrow AB^n=B^nA$$

۱۵- هرگاه B و C ماتریسهای مربع مرتبه n بوده و داشته باشیم $A=B+C$ ،
 $C^t=\bar{0}$ و $BC=CB$ باروش استقراء ثابت کنید .
 $A^{k+1}=B^k(B+(k+1)C)$ (k عدد طبیعی است)

$$۱۶- \text{هرگاه } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} , \text{ ثابت کنید که}$$

$$A^n = 2^n A - 2^n I$$

$$\text{ب- با استفاده از استقراء، } A^n = (2^n - 1)A - 2^n(2^{n-1} - 1)I$$

۱۷- در تساوی زیر A را حساب کنید .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$۱۸- \text{هرگاه } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \text{ ماتریسهای } A^{100} \text{ و } A^{201} \text{ را حساب کنید .}$$

$$۱۹- \text{اگر } A^n = 2\alpha A - \alpha^n I \text{ ثابت کنید}$$

$$A^n = n\alpha^{n-1}A - (n-1)\alpha^n I$$

$$۲۰- \text{هرگاه } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} , \text{ مطلوبست: الف- محاسبه } AA', \text{ ب- } (AA')' = AA'$$

۲۱- نشان دهید که:

الف- ضرب ماتریسهای قطری هم مرتبه دارای خاصیت جابجایی است .

ب- فرمول کلی برای D^p که دو آن D یک ماتریس قطری و P یک عدد حقیقی است به دست آورید .

۲۲- اگر A یک ماتریس مربعی باشد ثابت کنید $A+A'$ و AA' متقارن و $A-A'$ پادمقارن است.

۲۳- با توجه به مسأله ۲۲ آیا هر ماتریس را می‌توان به صورت حاصل جمع يك ماتریس متقارن و يك ماتریس پاد متقارن نوشت ؟ به چه شكل ؟

دترمینان

در کلاس دوم به هر ماتریس مربع مرتبه ۲ ،

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

عدد حقیقی $ad - bc$ را نسبت داده و آن را دترمینان ماتریس A نامیدیم و به این صورت نمایش دادیم :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (1)$$

هروقت تساوی (۱) را می‌نویسیم ، اصطلاحاً گفته می‌شود $|A|$ را بسط داده‌ایم .
ایک با استفاده از دترمینان ماتریسهای مربع مرتبه ۲ ، دترمینان ماتریسهای مربع مرتبه ۳ را چنین تعریف می‌کنیم :
تعریف - برای هر ماتریس :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

دترمینان A را با $|A|$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \quad (2)$$

هروك از دترمینانهای طرف چپ تساوی (۲) به این ترتیب به دست می‌آیند كه در دترمینان اصلی سطر و ستونی كه شامل ضریب آن دترمینان است حذف می‌شود :

$$|A| = a \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

سطر و ستون هفتمین مربعی A را اصطلاحاً سطر و ستونهای $|A|$ و مرتبه A را مرتبه $|A|$ می‌نامند. در تساوی (۲)، می‌گوئیم $|A|$ را بر حسب درایه‌های سطر اول یا به‌طور ساده بر حسب سطر اول بسط داده‌ایم. اینک نشان می‌دهیم که می‌توان $|A|$ را بر حسب سطر دوم یا سوم نیز بسط داد. برای این منظور درمینهای مرتبه دو از تساوی (۲) را بسط داده عبارات به‌دست آمده را دسته‌بندی می‌کنیم به‌تسبی که بتوان از درایه‌های سطر دوم یا سوم فاکتور گرفت

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\
 &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\
 &= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \\
 &= -bdi + cdh + aei - ceg - afh + bfg \\
 &= -d(hi - ch) + e(ai - cg) - f(ab - bg)
 \end{aligned} \quad (3)$$

بیا بر این :

$$= -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \quad \text{تعریف درمینهای } 2 \times 2$$

می :

$$|A| = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

داین بسط $|A|$ بر حسب درایه‌های سطر دوم درمینهای است (چرا؟). به همین ترتیب با استفاده از تساویهای (۳) فوق و دسته‌بندی مجدد آنها بسط $|A|$ بر حسب درایه‌های سطر سوم به‌دست می‌آید.

$$|A| = g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

با همین روش بسادگی ثابت می‌شود که می‌توان $|A|$ را بر حسب درایه‌های هر یک از ستونهایش بسط داد :

$$|A| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \quad \text{بر حسب ستون اول :}$$

$$|A| = -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \quad \text{بر حسب ستون دوم :}$$

$$|A| = c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \quad \text{بر حسب ستون سوم :}$$

علامت ضرایب دترمینانهای مرتبه ۲ در بسط يك دترمینان مرتبه ۳

در هریك از بسطهای بالا، علامت هر ضریب دترمینان 2×2 برابر است با:

$$(-1)^{i+j}$$

که در آن i نماینده سطری و j نماینده ستونی است که آن ضریب (درایه) در محل تلاقی آنها قرار دارد و این مطلب در بسط دترمینانهای از مرتبه بالاتر نیز درست است.

مثال :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \quad -1$$

۲- بر حسب سطر اول :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} \times 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3} \times 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 5(-1 + 12) - 2(-2 + 8) + 3(-6 + 2) \\ &= 55 - 12 - 12 = 31 \end{aligned}$$

۳- بر حسب سطر سوم :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} &= (-1)^{3+1}(-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(-3) \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+3}(-1) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -2(8-3) + 3(20-6) - 1(5-2)$$

$$= -10 + 42 - 1 = 31$$

م - بر حسب ستون دوم :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \times 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times 4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \times (-1) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-6+2) - 4(-15+2) - 1(5-2)$$

$$= -12 + 44 - 1 = 31$$

دترمینان ماتریس مرتبه ۱ را مساوی درایه آن تعریف می کنند یعنی دترمینان $[a_{11}]$ مساوی a_{11} است .

دستور ساروس برای بسط دترمینانهای 3×3

$$|B| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \quad \text{داشتیم که :}$$

$$|B| = a(ei - hf) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

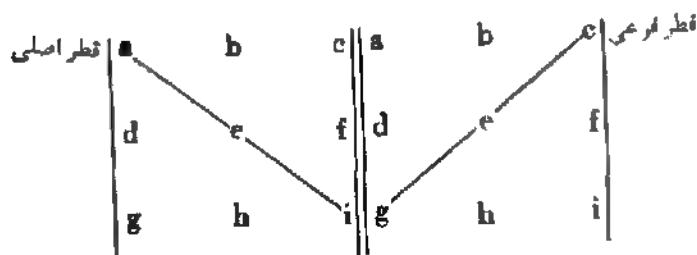
که می توان طرف راست این تساوی را به صورت زیر دسته بندی کرد :

$$|B| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh) \quad (1)$$

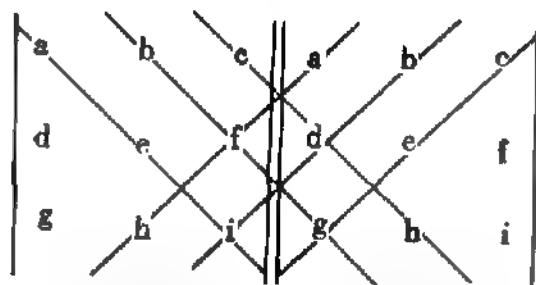
برای بخاطر سپردن تساوی (۱) از دستور زیر که به دستور ساروس معروف بوده و فقط برای

دترمینانهای 3×3 بکار میرود استفاده می کنیم :

دترمینان B را به صورت زیر کنار خودش قرار می دهیم .



سپس قطر اصلی دترمینان سمت چپ و قطر فرعی دترمینان سمت راست و همچنین دو خط موازی هر يك از این دو قطر به قوسی که روی هر خط سه درایه دترمینان قرار گیرد، مطابق شکل زیر، رسم می‌کنیم.



اکنون برای به دست آوردن تساوی (۱) یعنی بسط $|B|$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

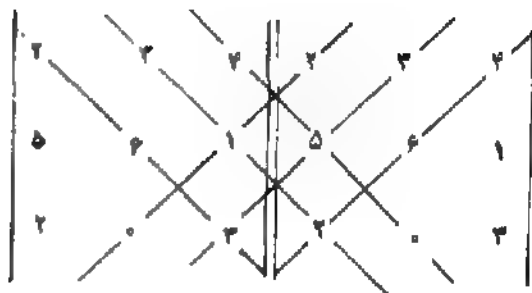
الف - حاصلضرب عددهای واقع بر قطر اصلی و همچنین حاصلضرب عددهای واقع بر هر يك از خطوط موازی قطر اصلی را به طور جداگانه به دست آورده باهم جمع می‌کنیم، که در اینصورت عبارت $cdh + bfg + aei$ حاصل می‌شود.

ب - حاصلضرب عددهای واقع بر قطر فرعی و همچنین حاصلضرب عددهای واقع بر هر يك از خطوط موازی قطر فرعی را به طور جداگانه به دست آورده باهم جمع می‌کنیم، که در اینصورت عبارت $afh + bdi + ceg$ حاصل می‌شود.

ج - حاصل ب را از الف کم می‌کنیم:

$$|B| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh)$$

و این همان تساوی (۱) است



مثال

۱-

$$\begin{aligned} &= (2 \times 6 \times 3 + 2 \times 1 \times 2 + 2 \times 5 \times 0) - (2 \times 6 \times 2 + 2 \times 5 \times 3 + 2 \times 1 \times 0) \\ &= (36 + 4 + 0) - (24 + 30 + 0) \\ &= 40 - 54 = -14 \end{aligned}$$

همچنین می‌توان دو دترمینان را زیر هم نوشته و عیناً مثل وقتی که آنها را کنار هم قرار دادیم محاسبه کنیم.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (0 \times 3 \times 7 + (-2 \times 6 \times 7 + 5 \times 0 \times 7) - (7 \times 3 \times 5 + 7 \times 0 \times (-2) + 2 \times 6 \times 0)) \\ = (0 - 84 + 0) - (105 + 0 + 0) = -189$$

در مورد دترمینان مثال ۲، دیده می‌شود که اگر آنرا برحسب سطر اول بسط دهیم زودتر به جواب خواهیم رسید.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ = 0 + 0 + 7(-12 - 15) = 7 \times -27 = -189$$

یعنی اگر درایه‌هایی از یک سطر یا ستون دترمینانی صفر باشد، محاسبه آن دترمینان ساده‌تر انجام می‌گیرد به همین دلیل در محاسبه دترمینانها سعی میشود بعضی از درایه‌های یک سطر یا یک ستون را به صفر تبدیل نموده سهم دترمینان را برحسب آن سطر یا ستون بسط دهند. برای این منظور از ویژگی‌هایی استفاده می‌شود که بعداً خواهید دید.

دترمینان مرتبه ۴

دترمینان یک ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ را نیز، نظیر آنچه برای دترمینان 3×3 گفته شد و با استفاده از دترمینانهای مرتبه ۳ آن، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

علامت ضرب $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ در این بسط با استفاده از دستور $1+(-1)^i$ به دست می آید.
 همچنین دترمینان یک ماتریس مرتبه n را می توان بر حسب هر یک از سطرها یا ستونهای آن بسط داد.

مثال ۱- بسط بر حسب سطر اول :

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|B| = -1 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

اکنون دترمینانهای مرتبه ۳ را بر حسب ستونهای اول آنها بسط می دهیم :

$$|B| = (-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-2)(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ = 1(2-0) - 2(2+1) = 2-6 = -4$$

به همین ترتیب دترمینان ماتریسهای مربعی مرتبه های بالاتر نیز قابل تعریف می باشند. در حقیقت دترمینان تابعی است از مجموعه ماتریسهای مربعی به مجموعه اعداد حقیقی.

ویژگیهای دترمینانهای مرتبه ۳

قوانین زیر برای دترمینانهای هر مرتبه درست است ولی ما آنها را برای دترمینانهای مرتبه ۳ بیان می کنیم.

قانون ۱- هرگاه جای تمام سطرها و ستونهای یک ماتریس را باهم عوض کنیم دترمینان آن ماتریس تغییر نمی کند. به عبارت دیگر $|A| = |A'|$

برای اثبات تساوی :

$$|A| = |A'|$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

دترمینان سمت راست را بر حسب سطر اول بسط می‌دهیم :

$$\begin{aligned}
 \text{دترمینان سمت راست} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
 &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) \\
 &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_3 - b_3c_1) + a_2(b_1c_3 - b_3c_1) \\
 &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad (1) \\
 &= \text{دترمینان سمت چپ}
 \end{aligned}$$

زیرا طرف راست تساوی (۱) ، بسط دترمینان سمت چپ بر حسب سطر اول آن است.
مثال :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 |B| &= 1(1 \times 2 + 3 \times 7) - 5(1 \times 2 - 7 \times 0) + 2(1 \times -3 - 1 \times 0) \\
 &= 25 - 10 - 6 = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |B'| &= 1(1 \times 2 + 3 \times 7) - 1(5 \times 2 + 2 \times 2) + 0(5 \times 7 - 1 \times 2) \\
 &= 25 - 16 + 0 = -1
 \end{aligned}$$

$$|B| = |B'| \quad \text{یعنی}$$

قانون ۲- از تعویض دو سطر (یا ستون) یک ماتریس مربع با هم ، تنها علامت دترمینان آن تغییر پیدا می‌کند - برای مثال :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

برای اثبات تساوی (۱) دترمینان سمت چپ را بر حسب سطر اول بسط می‌دهیم :

$$\begin{aligned}
 \text{سمت چپ تساوی (۱)} &= a_1(c_2b_3 - b_2c_3) - a_2(c_1b_3 - c_3b_1) + a_3(c_1b_2 - c_2b_1) \\
 &= -a_1(b_2c_3 - c_1b_3) + a_2(b_1c_3 - b_3c_1) - a_3(b_1c_2 - b_2c_1)
 \end{aligned}$$

$$= -[a_1(b_1c_2 - c_1b_2) - a_2(b_1c_2 - b_2c_1) + a_3(b_1c_1 - b_2c_1)]$$

$$= (\text{سخت دامت تساوی (۱)})$$

به همین ترتیب درستی مطلب برای تمویض هر دو سطر با هم ردیستون با هم اثبات می شود.
مثال:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{تمویض سطر اول و دوم با هم:}$$

$$|B| = 2(0 \times 1 - 2 \times 5) - 2(2 \times 1 + 1 \times 5) - 1(4 \times 2 + 0 \times -1)$$

$$= -20 - 27 - 8$$

$$= -55$$

$$|B_1| = 2(2 \times 1 + 1 \times 2) - 0(2 \times 1 - 1 \times 1) + 5(2 \times 2 + 3 \times 1)$$

$$= 20 - 0 + 35 = 55$$

قانون ۳- هرگاه دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مساوی باشند، دترمینان آن ماتریس برابر صفر است. مثلاً فرض کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

تمویض سطرهاى دوم و سوم این ماتریس با هم، هیچ نوع تأثیری روی B نمی گذارد، در حالیکه بنا بر قانون ۲، موجب تغییر علامت $|B|$ می گردد. پس داریم:

$$|B| = -|B|$$

$$2|B| = 0 \Rightarrow |B| = 0$$

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(2 \times 0 - 3 \times 4) - 2(1 \times 0 + 3 \times 1) + 3(1 \times 2 + 1 \times 2)$$

$$= -12 - 6 + 18 = 0$$

قانون ۴- هرگاه تمام اعضاى یک سطر یا یک ستون یک ماتریس در عددی مثل k

ضرب شود دترمینان آن ماتریس در k ضرب می‌شود. مثلا:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

مقدار دترمینان طرف چپ تساوی برابر است: (بر حسب ستون اول بسط داده ایم)

$$\text{طرف چپ} = a_1(kb_2)c_2 - a_1b_2(kc_2) + (ka_1)b_2c_2 - (ka_1)b_1c_2 + a_2b_1(kc_2) - a_2b_1(kb_2)c_2$$

$$= k(a_1b_2c_2 - a_1b_2c_2 + a_2b_2c_2 - a_2b_1c_2 + a_2b_1c_2 - a_2b_2c_2)$$

طرف راست =

نتیجه - اگر تمام درایه‌های يك ماتریس 3×3 در k ضرب شود دترمینان آن ماتریس در k^3 ضرب می‌شود.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

قانون ۵- هرگاه تمام درایه‌های يك سطر یا يك ستون ماتریس به صورت مجموع چند جمله باشد، آنگاه می‌توان دترمینان آن را نیز متناظراً به صورت مجموع چند دترمینان نوشت.

برای مثال:

$$\begin{vmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ} &= (u_1+v_1)b_2c_3 - (u_1+v_1)b_3c_2 - (u_2+v_2)b_1c_3 \\ &+ (u_2+v_2)b_3c_1 + (u_3+v_3)b_1c_2 - (u_3+v_3)b_2c_1 \\ &= [(u_1b_2c_3 - u_1b_3c_2) + (u_2b_3c_1 - u_2b_1c_3) + (u_3b_1c_2 - \\ &u_3b_2c_1)] + [(v_1b_2c_3 - v_1b_3c_2) + (v_2b_3c_1 - \\ &v_2b_1c_3) + (v_3b_1c_2 - v_3b_2c_1)] = \text{طرف راست} \end{aligned}$$

قانون ۶- هرگاه به سطر (یا به ستون) يك ماتریس مضاربی از سطرهاى ديگر (یا از ستونهاى ديگر) اضافه شود دترمینان ماتریس حاصل با دترمینان ماتریس قبلى مساوى است. مثلا:

$$\begin{vmatrix} a_1+pa_2+qa_3 & b_1+pb_2+qb_3 & c_1+pc_2+qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{طرف چپ} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{ذیرا بقیه دترمینانها طبق قانون ۳ برابر صفر می باشند}) \text{ طرف راست}$$

قانون ۷- هرگاه A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند داریم :

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

یعنی دترمینان حاصلضرب دو ماتریس برابر است با حاصلضرب دترمینانهای آن دو ماتریس.
اثبات این قانون از محصله این کتاب خارج است و به ذکر مثال زیر اکتفا می کنیم :

مثال :

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

قانون ۸- هرگاه درایه های یک سطر یا یک ستون دترمینالی صفر باشد آن دترمینان برابر

صفر است .

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

برای اثبات دترمینان را بر حسب سطری که صفر است بسط می دهیم .

قانون ۹

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = a d f$$

قانون ۱۰

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

دترمینان کهاد و همواره

دیدیم که :

$$|B| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

دترمینان کهاد a و $\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ را دترمینان کهاد b و $\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$ را دترمینان کهاد c می گویند . پس :

$$|B| = a(\text{دترمینان کهاد } a) - b(\text{دترمینان کهاد } b) + c(\text{دترمینان کهاد } c)$$

همچنین

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = +(\text{دترمینان کهاد } a)$$

را همواره درایه a و

$$\Delta_{12} = - \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} = -(\text{دترمینان کهاد } b)$$

را همواره درایه b و

$$\Delta_{13} = + \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = +(\text{دترمینان کهاد } c)$$

را همواره درایه c می گویند با این قرارداد درمیان ماتریس B خواهیم داشت :

$$|B| = a\Delta_{11} + b\Delta_{12} + c\Delta_{13}$$

به طور کلی اگر دو ماتریس :

$$A = \begin{matrix} & \text{ستون } j \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mj} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{سطر } i \\ \vdots \end{matrix}$$

برای هر درایه a_{ij} ، سطر و ستونی را که این درایه در محل تلاقی آنها قرار دارد حذف کنیم ، ماتریسی به دست می آید که آن را به A_{ij} نشان می دهیم :

حذف ستون j ام

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mj} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{حذف سطر i ام}$$

$|A_{ij}|$ را دترمینان کهاد دوایه a_{ij} و $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ را همسازه a_{ij} می خوانند.

مثال ۱- بسط دترمینان ماتریس زیر را بر حسب دترمینان کهادها و همسازه های سطر سوم

به دست آورید :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1|A_{11}| - 2|A_{12}| + 3|A_{13}| \\ &= 1\Delta_{11} - 2\Delta_{12} + 3\Delta_{13} \end{aligned}$$

مثال ۲- بسط دترمینان ماتریس زیر را بر حسب دترمینان کهادها و همسازه های ستون دوم

به دست آورید :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |B| &= -2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2 \times -|B_{12}| + 2|B_{13}| + 5 \times -|B_{11}| \\ &= -2\Delta_{12} + 2\Delta_{13} - 5\Delta_{11} \end{aligned}$$

ماتریس همسازه و ماتریس الحاقی (وابسته) يك ماتریس

در ماتریس :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

ماتریس $N = [N_{ij}]$ که در آن $N_{ij} = \Delta_{ji}$ را ماتریس همساز A می‌خوانند.

$$N = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

و ترانزپوز N را ماتریس الحاقی A می‌گویند:

$$N' = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس‌های همساز و الحاقی $\begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ را بنویسید:

$$\Delta_{11} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{12} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_{13} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -22, \quad \Delta_{21} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_{22} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -12, \quad \Delta_{23} = (-1)^0 \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -30$$

$$\Delta_{31} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_{32} = (-1)^0 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13$$

$$\Delta_{33} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 22$$

پس:

$$N = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -22 \\ 0 & -12 & -30 \\ -3 & 13 & 22 \end{bmatrix}$$

$$N' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -6 & -12 & 13 \\ -22 & -30 & 22 \end{bmatrix}$$

تمرین

۱- دترمینان هریک از ماتریسهای زیر را بدست آورید :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 8 & 16 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 6 \\ -5 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 85 & 87 & 89 \\ 61 & 62 & 67 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 13 \\ 15 & 0 & 17 \\ 13 & 11 & -5 \end{bmatrix} ; E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & 18 & 5 \\ 3 & 18 & 81 & 324 \\ 8 & 5 & 324 & 0 \end{bmatrix} ; F = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & -7 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

۲- دترمینان هریک از ماتریسهای AB و BD را بدست آورید .

۳- با استفاده از خواص دترمینانها ثابت کنید :

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix} = 1+a_1+a_2+a_3$$

۴- با استفاده از خواص دترمینانها ثابت کنید :

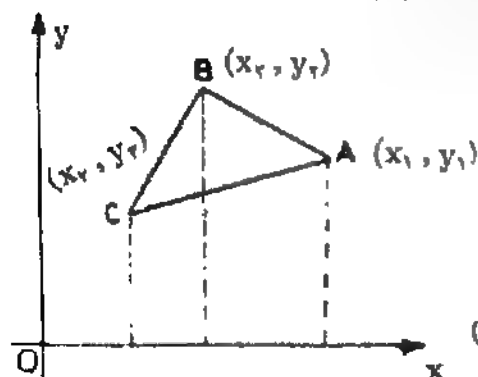
$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^3$$

۵- با استفاده از خواص دترمینانها ثابت کنید :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2$$

۶- در شکل زیر الف-مختصات نقاط A ، B و C به ترتیب عبارتند (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) و

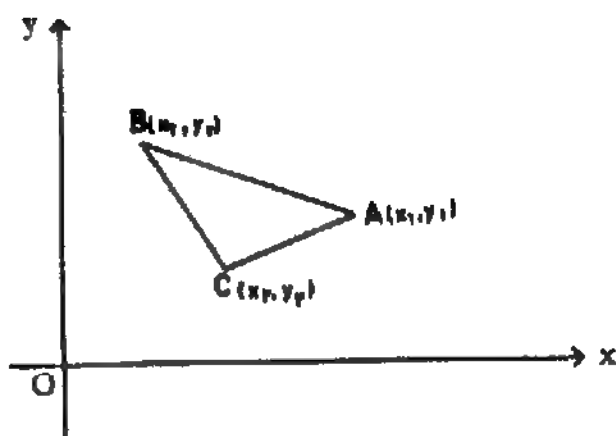
(x_3, y_3) ، ثابت کنید که مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(راهنمایی: از مساحت ذوزنقهها استفاده کنید)

بـ دترمینانی که مساحت مثلث زیر را تعیین می کند بنویسید .



با توجه به مطالب فوق آیا می توان گفت هرگاه $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ ، $C(x_3, y_3)$

نوس مثلثی باشند آنگاه داریم ، $S_{ABC} = \frac{1}{2} |H|$ که در آن $H = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ ؟ رتبی $|H| = 0$ باشد چه نتیجه ای می توان گرفت ؟

۷- نشان دهید که $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ معادله خط راستی است که از نقاط (a, b) و (c, d) می گذرد .

۸- با توجه به مسئله ۸ ، معادله خطی که از دو نقطه $(1, 2)$ و $(3, -1)$ می گذرد بنویسید .

۹- بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینانهای مرتبه ۳ ثابت کنید که :

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ q+r & p+r & p+q \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۱۰- همواره های p, q, r را در هر يك از دترمینانهای زیر تعیین کنید .

$$\begin{vmatrix} p & q \\ a & b \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} p & q \\ r & -5 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a & 0 & q \\ b & p & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} l & m & n \\ p & q & r \\ a & t & u \end{vmatrix}$$

۱۱- هرگاه داشته باشیم :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس همساز A ، یعنی N ، را بنویسید .

۱۲- اگر A يك ماتریس متقارن باشد ثابت کنید

$$|A+B| = |A+B'|$$

۱۳- اگر A يك ماتریس و به ازاء يك عدد صحیح فرد k ، $A^k = I$ نشان دهید

$$|A| = 1$$

۱۴- اگر A ماتریس مربعی باشد ثابت کنید

$$|A^*| = |A|^n$$

۱۵- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$ ، AA' را حساب کنید و از آنجا بدون سطر ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 2a^2b^2c^2$$

۱۶- اگر A يك ماتریس مربعی باشد ثابت کنید

$$|AA'| \geq 0$$

۱۷- بدون سطر ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & 7 & 12 & 17 & 22 \\ 3 & 8 & 13 & 18 & 23 \\ 4 & 9 & 14 & 19 & 24 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

۱۸- فرض کنید ماتریس 3×3 مانند C را بتوان به صورت حاصلضرب يك ماتریس

3×2 در يك ماتریس 2×3 نوشت نشان دهید $|C| = 0$

$$\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

حل دستگاه معادلات با استفاده از ماتریس وارون (معکوس)
دستگاه

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 2x + 7y = 16 \end{cases}$$

را با توجه به ضرب و تساوی ماتریسها به صورت زیر می نویسیم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

را به ترتیب از چپ به راست ماتریس ضرائب ، ماتریس مجهولات و ماتریس مقادیر معلوم می خوانند . آیا می توان یک ماتریس مربعی مرتبه ۲ پیدا کرد به گونه ای که اگر آن را در ماتریس ضرائب از سمت چپ ضرب کنیم ماتریس I_2 بدست آید؟ بطوری که در زیر می بینید جواب این سؤال مثبت است :

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین برای حل معادله :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

طرفین آن را دو ماتریس $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ بصورت زیر ضرب می کنیم :

$$\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \end{bmatrix}$$

خاصیت شرکت پذیری ضرب ماتریسها

$$\left(\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \end{bmatrix}$$

بنابراین :

در اینجا داریم :

$$\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ است به عمل ضرب است که آنرا

وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ می نامیم .

ماتریس وارون

تعریف - اگر برای ماتریس مربعی A ماتریس مربعی B وجود داشته باشد بخشی که $AB = BA = I$ ، آنگاه A را وارون پذیر (غیرمنفرد) نامیده و B را وارون A می گویند.

قضیه - اگر ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد و وارون آن منحصر بفرد است

اثبات - فرض می کنیم B و C هر دو وارون A باشند یعنی :

$$AB = BA = I \text{ و } AC = CA = I$$

بنابراین :

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

لذا اگر A وارون A^{-1} را با A^{-1} نشان می‌دهند .

به‌طور کلی :

برای حل يك دستگاه دو معادله و دو مجهول به‌صورت :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \quad (1)$$

باید ابتدا ببینیم آیا وارون ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ موجود است؟ در صورتی که جواب مثبت باشد ،

ماتریس وارون آن را به‌دست آورده ، طرفین معادله (۱) را در این ماتریس وارون ضرب نمود .
 عبارت دیگر ، هرگاه ماتریس ضرائب را با A و ماتریس مجهولات را با X و ماتریس معلوم را با B نمایش دهیم ، معادله (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$AX = B \quad (2)$$

برای حل این معادله ماتریسی ، بتایر آنچه در بالا گفته شد ، باید طرفین آنرا در وارون ضربی A (معکوس A) ، در صورت وجود ، ضرب کرد . اگر وارون A یعنی A^{-1} موجود باشد . معادله (۲) را چنین حل می‌کنیم :

$$AX = B$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \quad \text{خاصیت تساوی :}$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad \text{خاصیت شرکت‌پذیری :}$$

$$IX = A^{-1}B \quad \text{تعریف عضو وارون :}$$

$$X = A^{-1}B \quad \text{خاصیت عضو ی‌اثر :}$$

یعنی به‌طور خلاصه در حالتی که A^{-1} موجود باشد ، برای تعیین X ، کافی است A^{-1} را از سمت چپ در B ضرب کنیم :

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

این دستور برای حل دستگاههای n معادله و n مجهول نیز درست است .

بنابراین همان‌طور که دیدید ، جواب يك دستگاه معادله بستگی به‌وجود و تعیین وارون ماتریس ضرائب دستگاه دارد . اینک شرط وجود و روش پیدا کردن وارون يك ماتریس را بررسی می‌کنیم .

ماتریس وارون يك ماتریس مربع مرتبه ۳

قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس A وارون داشته باشد آن است که $|A| \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

حاصلضربهای AN' و $N'A$ را حساب کرده نشان می‌دهیم که :

$$AN' = N'A = |A|I \quad (N' \text{ ماتریس الحاقی } A \text{ است})$$

$$AN' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} \quad \text{داریم:}$$

درایه سطر i ام و ستون j ام این حاصلضرب عبارتست از:

$$a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + a_{i3}\Delta_{j3} \quad (1)$$

(مثلا درایه سطر سوم و ستون دوم عبارتست از: $a_{31}\Delta_{21} + a_{32}\Delta_{22} + a_{33}\Delta_{23}$ - حال ثابت می‌کنیم که AN' يك ماتریس قطری است. یعنی، وقتی $i \neq j$ ، مقدار (۱) برابر $|A|$ و هرگاه $i = j$ ، برابر صفر است.

الف - $i = j = 1$ ، فرض کنیم $i = j = 1$ ، در اینصورت با توجه به تعریف همسازه داریم:

$$a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = |A|$$

و به همین ترتیب برای $i = j = 2$ و $i = j = 3$ ثابت می‌شود.

ب - اگر $i \neq j$ ، فرض کنیم $i = 1$ و $j = 2$ ، داریم:

$$\begin{aligned} a_{11}\Delta_{21} + a_{12}\Delta_{22} + a_{13}\Delta_{23} &= -a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ &= -a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{12}a_{31} \\ &= 0 \end{aligned}$$

به همین ترتیب برای سایر سطرها و ستونهایی که در آنها $i \neq j$ ، ثابت می‌شود. بنابراین داریم:

$$AN' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

$$= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AN' = |A| I_3$$

یعنی

$$N'A = |A| I_3$$

به همین ترتیب ثابت می شود :

$$AN' = N'A = |A| I_3$$

بنابراین داریم :

اگر $|A| \neq 0$ ، طرفین این تساوی را بر $|A|$ تقسیم می کنیم خواهیم داشت :

$$A \cdot \frac{N'}{|A|} = \frac{N'}{|A|} \cdot A = I_3$$

که با توجه به تعریف عضو وارون نسبت به عمل ضرب در مجموعه ماتریسهای 3×3 و منحصر به

نبرد بودن آن نتیجه می شود که $\frac{N'}{|A|}$ وارون A است . یعنی :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} N'} \quad (2)$$

بنابراین اگر $|A| \neq 0$ ، A^{-1} موجود است و بالعکس ، به طوری که دیدید ، اگر A^{-1} وارون ماتریس مربعی A باشد داریم :

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

بنابر ویژگی دترمینان بدست می آید : $|A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1$ و چون $|A|$ و $|A^{-1}|$

دو عدد هستند که حاصلضرب آنها مخالف صفر است دو نتیجه $|A| \neq 0$ پس اگر ماتریس A وارون پذیر باشد ، آنگاه $|A| \neq 0$. بنابراین :

شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس A وارون داشته باشد آنستکه $|A| \neq 0$.

تساوی (2) دستور العمل محاسبه وارون يك ماتریس مرتبه 3 است . این دستور العمل را

می توان برای تعیین وارون هر ماتریس مربعی یکاد برد

مثال - وارون ماتریس زیر را حساب کنید :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \text{ معکوس} = N = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 6 & -1 \\ 8 & -2 & -1 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \text{ معکوس} = N' = \begin{bmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 6 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ = 1(2 - 12) - 2(0 - 6) + 2(0 - 1) = -8$$

طبق دستور العمل داریم :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} N' \\ = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 6 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

دستور عملی برای محاسبه وارون یک ماتریس 2×2

هرگاه ماتریس A و ماتریس معکوس آن N' را باهم مقایسه کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad N' = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

می بینیم که ماتریس N' از تعویض جای درایه های قطر اصلی و تغییر علامت های درایه های قطر فرعی حاصل شده است. بنابراین برای تعیین وارون ماتریس مربعی 2×2 با توجه به

فرم کلی است جای درایه های قطر اصلی را باهم عوض کرده و علامت های درایه های قطر فرعی را تغییر داده سپس آنرا در معکوس دترمینانش ضرب کرد.

مثال - وارون ماتریسهای زیر را بنویسید :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

طبق دستور فوق داریم :

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \times 2 - 2 \times 5} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{12} & \frac{2}{12} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-26 - 18} \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{44} \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

چند مثال

$$\begin{cases} 6x + 2y = 7 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases} \quad 1- \text{مطلوبست حل دستگاه معادلات:}$$

چون $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ، ماتریس ضرایب وارون ندارد و دستگاه بدینطریق دارای جواب نیست.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 9 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad 2- \text{مطلوبست حل دستگاه معادلات:}$$

چون $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11$ ، دو نتیجه دستگاه دارای جواب است.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 22 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3- مطلوبست حل دستگاه:

$$\begin{cases} 3x - y + 5z = 22 \\ 5x - 7y + 2z = -8 \\ x - 11y + 7z = 20 \end{cases}$$

صورت ماتریسی دستگاه عبارتست :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & -7 & 3 \\ 1 & -11 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ -8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$AX=B$$

سادگی دهنده می شود که :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & -7 & 3 \\ 1 & -11 & 7 \end{vmatrix} = -256 \quad N = \begin{bmatrix} -16 & -22 & -28 \\ -28 & 16 & 22 \\ 22 & 16 & -16 \end{bmatrix}$$

$$N' = \begin{bmatrix} -16 & -28 & 22 \\ -22 & 16 & 16 \\ -28 & 22 & -16 \end{bmatrix} = -16 \begin{bmatrix} +1 & +2 & -2 \\ +2 & -1 & -1 \\ +2 & -2 & +1 \end{bmatrix}$$

حال طرفین معادله ماتریسی را در $\frac{1}{|A|}N'$ ضرب می کنیم :

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & -7 & 3 \\ 1 & -11 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ -8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$I, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -22 \\ 52 \\ 122 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{22}{16} \\ \frac{52}{16} \\ \frac{122}{16} \end{bmatrix}$$

دستور کرامر

یکی از موارد استعمال دترمینان حل دستگاه معادلات به کمک دستور کرامر می باشد که آنرا در حالت سه معادله سه مجهول بررسی می کنیم و می توان آنرا برای حالت کلی نیز تعمیم داد.

دستگاه معادلات بصورت :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (1)$$

داده شده و دترمینان ماتریس ضرایب آن مخالف صفر فرض شده است یعنی :

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

دترمینان ماتریس ضرایب

ستونهای این ماتریس از چپ به راست به ترتیب ضرایب x ، y ، z می باشند. دترمینانهای زیر را دترمینانهای متناظر با مجهولهای x ، y ، z خوانده آنها را به ترتیب به Δ_x ، Δ_y ، Δ_z نشان می دهند.

$$\Delta_x = \det \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

در ماتریس ضرایب، بجای ستون اول مقادیر ثابت آمده است :

$$\Delta_y = \det \begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

در ماتریس ضرایب بجای ستون دوم مقادیر ثابت آمده است :

$$\Delta_z = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

در ماتریس ضرایب بجای ستون سوم مقادیر ثابت آمده است :

دستور کرامر جوابهای دستگاه (۱) را به صورت زیر ارائه می دهد .

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \end{cases}$$

اثبات تساوی بالا را در زیر بیان می کنیم :

ابتدا دترمینان ضرایب دستگاه را می نویسیم :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

طرفین این تساوی را در x ضرب می کنیم : (هرگاه بخواهیم دترمینانی را دو صدی ضرب کنیم کافی است آن را در یک سطر یا یک ستون آن ضرب کنیم)

$$\Delta \cdot x = \begin{vmatrix} a_1 x & b_1 & c_1 \\ a_2 x & b_2 & c_2 \\ a_3 x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

طبق قانون ۶ هرگاه y برابر ستون دوم و z برابر ستون سوم را آخر ستون اول بگذاریم

$$\Delta \cdot x = \begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z & b_1 & c_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & b_2 & c_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{دترمینان تغییر نمی کند.}$$

بجای ستون اول دترمینان طرف راست، طبق دستگاه (۱) مقادیرشان را قرار می دهیم:

$$\Delta \cdot x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta \cdot x = \Delta_x$$

روش اثبات برای دستگاه n مجهولی نیز به همین طریق است.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

دستور العمل فوق برای حل دستگاه:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

به صورت زیر نوشته می شود:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

دستور کرامر برای حل n معادله و n مجهول نیز درست است.

مثال - مطلوبست حل دستگاه :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ 3x - 2y - z = -4 \\ x - y + 2z = 8 \end{cases}$$

طبق دستور کرامر داریم :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 8 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}} ; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}} ; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}$$

که پس از محاسبه خواهیم داشت :

$$(x, y, z) = (1, 2, 2)$$

شرط وجود جوابهای غیر صفر برای دستگاه معادلات همگن
تعریف - هرگاه مقادیر ثابت یک دستگاه معادلات درجه اول همگی صفر باشند آن دستگاه
را همگن گویند .

دستگاه زیر یک دستگاه معادلات همگن است .

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \\ c_1x + c_2y + c_3z = 0 \end{cases}$$

برای تعیین جوابهای این دستگاه گوئیم :

الف - اگر $\Delta \neq 0$ باشد طبق دستور کرامر داریم :

$$(1) \quad \Delta \cdot x = \Delta_x \text{ و } \Delta \cdot y = \Delta_y \text{ و } \Delta \cdot z = \Delta_z$$

چون هر يك از دترمینانهای Δ_x ، Δ_y ، Δ_z دارای يك ستون صفر می باشند پس طبق قانون

۸ دترمینانهای هر کدام برابر صفر است ، در نتیجه تنها جواب دستگاه عبارتست از :

$$z = 0, y = 0, x = 0$$

ب - اگر $\Delta = 0$ باشد آنگاه دستگاه (۱) بصورت زیر در می آید.

$$0 \cdot x = 0 \text{ و } 0 \cdot y = 0 \text{ و } 0 \cdot z = 0$$

و دارای جوابهای بی شمار خواهد بود.

لذا شرط وجود جوابهای مخالف صفر دستگاه همگن فوق این است که:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی شرط وجود جوابهای غیر از صفر برای يك دستگاه همگن این است که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر باشد.

قضیه ۱- هرگاه A و B ماتریسهای مربعی باشند و $AB=I$ ، آنگاه A وارون پذیر بوده و $BA=I$

برهان - داریم: $0 \neq |A| \Rightarrow |A| \cdot |B| = |AB| = |I| = 1 \Rightarrow |B| \neq 0$ پس A وارون پذیر است.

$$BA = A^{-1}A = I \quad B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}$$

قضیه ۲- هرگاه A و B دو ماتریس وارون پذیر باشند داریم:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

برهان - بنا بر قضیه ۱ گاهی است ثابت کنیم

برای اینکار می نویسیم:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} \quad \text{شرکت پذیری:}$$

$$= AIA^{-1} \quad \text{تعریف وارون:}$$

$$= AA^{-1} \quad \text{تعریف عضو یکان:}$$

$$= I \quad \text{تعریف وارون:}$$

قضیه ۳- هرگاه A وارون پذیر و A' ماتریس ترانژاده آن باشد داریم:

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

برهان - بدین که $(AB)' = B'A'$ ، در این تساوی بجای B ماتریس A^{-1} قرار

می دهیم می شود:

$$(AA^{-1})' = (A^{-1})'A'$$

$$I = (A^{-1})'A' \quad (۱)$$

اینک شرط قسبه ۱ برقرار است پس:

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

ماتریسهای مقدماتی و عملهای سطری یا ستونی مقدماتی

در تعیین ماتریس وارون ماتریسهای مرتبه ۴ و بالاتر، معمولاً از کامپیوتر با ماشینهای محاسبه استفاده می‌شود. برای اینکار، ماشین ماتریسهائی بنام ماتریسهای مقدماتی بکار می‌برد. باین ترتیب که از خواص این ماتریسها استفاده نموده با ضرب تعدادی از آنها در ماتریس معروضی آنرا به ماتریس همانی تبدیل می‌کند و از آنجا حاصلضرب این تعداد ماتریسهای مقدماتی که همان ماتریس وارون مورد نظر است به دست می‌دهد.

عملهای سطری مقدماتی:

تعریف - روی يك ماتریس A ، عملهای زیر را، عملهای سطری مقدماتی گویند.

- ۱- جای سطرهای يك ماتریس عوض شود.
 - ۲- يك سطر دو يك عددی مخالف صفر ضرب شود.
 - ۳- مضربی غیر صفر از يك سطر به سطر دیگر اضافه گردد.
- اگر اعمال فوق بجای اینکه روی سطرها انجام شود در مورد ستونها انجام گردد آنها را عملیات ستونی مقدماتی نامند.

مثال : هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ آنگاه با انجام دادن عملیات سطری مقدماتی

۱، ۲، ۳، فوق روی A به ترتیب ماتریس A_1 و A_2 و A_3 بدست می‌آید.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 14 & 12 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 19 & 20 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف - هر ماتریس را که با انجام عملهای سطری مقدماتی روی A بدست می‌آید ماتریس مقدماتی می‌نامند. در میان هر ماتریس مقدماتی مخالف صفر می‌باشد.

انواع ماتریسهای مقدماتی مرتبه ۲ که با استفاده از اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ بدست آمده است عبارتند از: } (k \in \mathbb{R})$$

۱- تعویض جای دو سطر ماتریس I_2 :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۲- ضرب يك سطر ماتریس I_2 در k :

$$E_2 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ یا } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

۳- جمع کردن مضرب k یک سطر با سطر دیگر $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ یا $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E_r

اکنون خواص این ماتریسها را مورد بررسی قرار می دهیم . برای هر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

چنین داریم :

۱- از ضرب ماتریس مقدمانی E_1 در A ، جای سطرهای ماتریس A باهم عوض می شود.

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

۲- از ضرب ماتریس مقدمانی E_2 در A ، سطر اول A در k ضرب می شود .

$$E_2 A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$$

۳- از ضرب ماتریس مقدمانی E_3 در A ، سطر دوم A در k ضرب می شود .

$$E_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

۴- از ضرب ماتریس مقدمانی E_4 در A ، سطر اول A ، مضربی از سطر دوم افزوده می شود.

$$E_4 A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$E_5 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ ka+c & kb+d \end{bmatrix}$$

نتیجه ۱- هرگاه ماتریسهای مقدمانی از طرف چپ در یک ماتریس ضرب شود آنگاه عملیات

سطری نظیر به آن ماتریس مقدماتی روی ماتریس انجام میگیرد .

حال ببینیم با تعویض جای A و E_i چه تغییری در حاصل ضرب انجام می شود .

۱- از ضرب A در E_1 جای دو ستون A باهم عوض می شود .

$$A E_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

۲- از ضرب A در E_r ، ستون اول یا دوم A در k ضرب می‌شود.

$$AE_r = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & b \\ kc & d \end{bmatrix}$$

$$AE_r = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & bk \\ c & dk \end{bmatrix}$$

۳- از ضرب A در E_r ، پرستون دوم یا اول A مضربی از ستون اول یا دوم اضافه می‌شود.

$$AE_r = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & ak+b \\ c & ck+d \end{bmatrix}$$

$$AE_r = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bk & b \\ c+dk & d \end{bmatrix}$$

نتیجه ۲ - هرگاه ماتریس مقدماتی از طرف راست در یک ماتریس ضرب شود آنگاه عملیات ستونی نظیر به آن ماتریس مقدماتی روی ماتریس انجام می‌گیرد.

ماتریسهای مقدماتی مرتبه ۳

در زیر ماتریسهای مقدماتی مرتبه ۳ با استفاده از اعمال سطری مقدماتی روی $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ نوشته شده است :

۱- تعویض جای دو سطر I_3

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۲- ضرب یک سطر I_3 در k

$$E_2 = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

۳- جمع کردن مضرب k يك سطر بر سطر دیگر

$$E_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در اینجا نیز اگر A يك ماتریس مرتبه ۳ باشد داریم :

۱- $E_1 A$ ، جای دومطر A را باهم عوض می کند.

۲- $E_r A$ ، يك سطر A را در عدد k ضرب می کند .

۳- $E_r A$ ، ضربی از يك سطر A بر سطر دیگر میافزاید از تغییر $E_i A$ به $A E_i$ ، تغییر ت

متشابهی در ستونهای A حاصل می شود . اندیسه های ماتریسهای مقدماتی انتخابی است . یعنی دلیلی ندارد که ما همیشه E_1 ، E_r ، E_p را به ترتیب فوق بکار ببریم . .

به طور کلی : برای بدست آوردن ماتریس $E_i A$ (یا $A E_i$) کافی است عملی را که

E_i روی I انجام می دهد روی سطر (یا ستون) A انجام داد .

مثال : با استفاده از ماتریسهای مقدماتی معکوس ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ را حساب کنید

(روش ماشینی) .

$$E_r A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_r(E_r A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

$$E_r(E_r E_r A) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{13} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{13}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

$$E_y(E_r E_r E_y A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(E_y E_r E_r E_y) A = I \quad \text{و یا:}$$

و با توجه به اینکه $A^{-1}A = I$ و A^{-1} منحصر بفرد است نتیجه میشود:

$$A^{-1} = E_y E_r E_r E_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{13} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و یا:}$$

تمرین

۱- وارون هر يك از ماتریسهای زیر را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} - & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 10 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 2 & 11 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

۲- هرگاه داشته باشیم:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

مطلوبست تعیین: $B^{-1}B'$, BB' , B' , B^{-1} .

۳- دستگاه معادلات زیر را با استفاده از ماتریسهای وارون حل کنید.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} ; \begin{cases} 5x-2y=10 \\ 3x-5y=15 \end{cases} ; \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases} ; \begin{cases} x+7y+2z=7 \\ x-7y+2z=2 \\ 7x+z=6 \end{cases}$$

۴- دستگاه معادلات تمرین ۳ را با استفاده از دستورکرامر حل کنید.

۵- وارون ماتریس A را حساب و دستگاه مربوط را حل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

۶- ماتریس زیر مفروض است :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AA' \text{ و } A'A \text{ را حساب کنید و از آنجا با محاسبه نشان دهید } A^{-1} = \frac{1}{49} A'$$

۷- a را قسماً تعیین کنید که دستگاه زیر دارای جواب غیر صفر باشد .

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + 7y - z = 0 \\ 7x - ay + 2z = 0 \end{cases}$$

۸- چهار رابطه‌ای بین a ، b و c برقرار باشد تا دستگاه زیر دارای جواب غیر صفر باشد.

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ bx + cy + az = 0 \\ cx + ay + bz = 0 \end{cases}$$

۹- هرگاه B یک ماتریس وارون پذیر باشد ، ثابت کنید .

$$\text{الف- اگر } BB' = B'B \text{ ، آنگاه } B^{-1}B' = B'B^{-1}$$

$$\text{ب- با توجه به محکم الف ، اگر } C = B^{-1}B' \text{ ، آنگاه } CC' = I$$

۱۰- ثابت کنید که اگر دو ماتریس A و B تعویض پذیر و وارون پذیر باشند ماتریسهای

A^{-1} و B و همچنین A^{-1} و B^{-1} نیز تعویض پذیرند .

۱۱- الف - اگر A ماتریس مربعی وارون پذیر باشد ثابت کنید:

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

ب- اگر A متقارن و وارون پذیر با همسازیهایی $|A_{ij}| = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ ثابت کنید:

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$$

۱۲- هرگاه A يك ماتریس مربع وارون پذیر باشد ثابت کنید

$$A^{-1} = (A' A)^{-1} A'$$

۱۳- ثابت کنید وارون ماتریس :

$$A_{\alpha} B_{\beta} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

ماتریس $B - \beta A - \alpha$ است .

۱۴- وارون هر يك از ماتریسهای دست چپ زیر را به دست آورده و از آنجا وارون A

را حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 + \lambda \mu & \lambda & 0 \\ \mu & 1 + \lambda \mu & \lambda \\ 0 & \mu & 1 \end{bmatrix}$$

۱۵- ثابت کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \theta \\ \gamma \theta & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow I + A = \begin{bmatrix} \cos \gamma \theta & -\sin \gamma \theta \\ \sin \gamma \theta & \cos \gamma \theta \end{bmatrix} (I - A)$$

۱۶- ثابت کنید که :

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

۱۷- هرگاه داشته باشیم :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای مقدماتی E_x, E_y, E_z را به‌قسمی پیدا کنید که $E_y B = C, E_x A = B$ و $E_z C = I$.

۱۸- هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$ ، با اعمال مقدماتی روی A ماتریس B را بدست

آوردید :

$$B = \begin{bmatrix} 1+da & d & 0 \\ a & 1+da & d \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

۱۹- اگر A و B متقارن وارون‌پذیر و AB نشان‌دهنده $AB^{-1}, A^{-1}B, AB$ و $A^{-1}B^{-1}$ متقارن هستند.

۲۰- فرض کنید A_1, A_2, A_3, X و Y ماتریسهای $n \times n$ و φ ماتریس اول وارون‌پذیر باشند ثابت کنید ماتریس $Y = A_1 X A_2 X A_3$ وارون‌پذیر است

۲۱- اگر A ماتریس مربعی وارون‌پذیر و $A+B$ و $A-B$ نیز وارون‌پذیر باشند ثابت کنید:

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B) \quad \text{الف}$$

$$(A-B)^{-1}A(A+B)^{-1} = (A+B)^{-1}A(A-B)^{-1} \quad \text{ب}$$

۲۲- اگر C وارون‌پذیر باشد نشان دهید برای هر ماتریس X هم مرتبه با C داریم:

$$|CXC^{-1}| = |X|$$

۲۳- فرض کنید A یک ماتریس دلخواه $n \times n$ و C یک ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ باشد ثابت کنید

$$(C^{-1}AC)^n = C^{-1}A^n C$$

۲۴- اگر B ماتریس مربعی و AB یک مضرب غیر صفر ماتریس همانی باشد نشان دهید $-AB = BA$.

بذیل در صفحه با استفاده از ماتریسها

هرگاه ماتریس مربع $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را دوبردار ستونی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر ضرب کنیم :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

بردار ستونی جدیدی مثل $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ به دست می آید :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (1)$$

که می نویسند :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تحت ماتریس } A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

می خوانند نقطه (x, y) تحت ماتریس A به نقطه (x', y') تبدیل یافته یا بر (x', y') تصویر

شده است به عبارت دیگر ماتریس A نظیر يك تابع T_A بصورت زیر است :

$$T_A: R^2 \rightarrow R^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{T_A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$T_A: R^2 \rightarrow R^2$$

و یا

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

معادله ماتریسی (1) را به صورت :

$$\begin{cases} ax + by = x' \\ cx + dy = y' \end{cases}$$

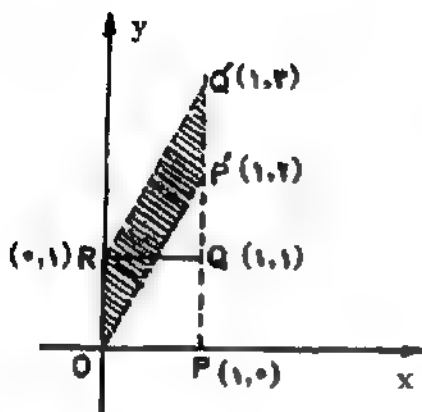
نوشته آنها را معادلات تبدیل خطی در صفحه می خوانند .

مثال- تبدیل یافته های (تصویر) نقاط $O(0,0)$ ، $P(1,0)$ ، $Q(1,1)$ و $R(0,1)$ را

$$\text{تحت ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ به دست می آید پیدا کنید .}$$

حل :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{زیرا } O \xrightarrow{T_A} O$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{زیرا } P \xrightarrow{T_A} P'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{زیرا } Q \xrightarrow{T_A} Q'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{زیرا } R \xrightarrow{T_A} R$$

بطور کلی تبدیل یافته یک خط مستقیم تحت ماتریس 2×2 خطی است مستقیم (چرا؟)
 پس مربع واحد OPQR در مثال بالا تحت ماتریس A به متوازی الاضلاع OP'Q'R'
 تبدیل می گردد.

T_A
 متوازی الاضلاع $OP'Q'R' \rightarrow$ مربع OPQR

ممکنین معادلات تبدیل در مثال بالا عبارتند از :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

یعنی هر نقطه دلخواه (x, y) از صفحه تحت ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ به نقطه $(x, 2x + y)$ تبدیل

می شود.

در این قسمت ماتریس متناظر با هر یک از تبدیلهای معمول در هندسه مسطحه را پیدا می کنیم.

ماتریس تجانس - هرگاه $\vec{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{OM'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ دو بردار باشند بطوریکه

$\vec{OM'} = k\vec{OM}$ ، نقطه M' را مجانس M با نسبت k می نامند . بنابراین :

$$\vec{OM'} = k\vec{OM}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = kx + 0y \\ y' = 0x + ky \end{cases} \quad (1)$$

ماتریس ضرایب مجهولات دستگاه (1) ، پس ماتریس اسکالر :

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

را ماتریس تجانس می‌خوانند.

اگر $k > 1$ تصویر بزرگ می‌شود و اگر $0 < k < 1$ تصویر کوچک می‌گردد در حالت $k = 1$ تصویر تغییر نمی‌کند. (در حالتی که $k = -1$ باشد تصویر قرینه شکل نسبت به مرکز تجانس می‌باشد).

مثال - تبدیل مربع واحد OPQR را تحت ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ به دست آورید.

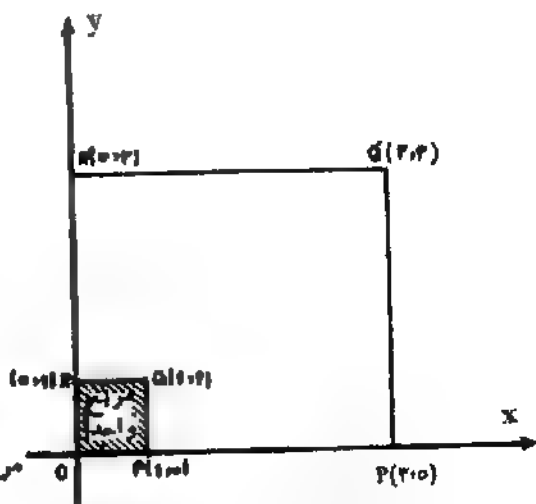
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{زیرا } O \xrightarrow{T_A} O$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{زیرا } P \xrightarrow{T} P'$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{زیرا } Q \xrightarrow{T_A} Q'$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{زیرا } R \xrightarrow{T_A} R'$$

مربع OPQR $\xrightarrow{T_A}$ مربع OPQ'R'



ماتریس دوران حول مبدأ مختصات - در کتاب ریاضیات جدید - سال دوم، ماتریس دوران حول مبدأ در جهت مثبت و اندازه زاویه θ را به صورت زیر به دست آوریم.

$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

هرگاه در این ماتریس، θ را به $-\theta$ تبدیل کنیم ماتریس دوران حول مبدأ و اندازه زاویه θ در خلاف جهت مثبت به دست می‌آید:

$$R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

مثال ۱- تصویر نقطه دنگواه (x, y) را پس از دوران نقاط صفحه حول مبدأ مختصات و پاندازه زاویه θ به دست آورید .

حل - هرگاه (x', y') ، مختصات تبدیل یافته (x, y) باشد داریم :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

که پس از ضرب (x', y') به دست می آید :

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

مثال ۲- هرگاه (x', y') ، تبدیل یافته نقطه (x, y) از صفحه پس از دوران پاندازه θ حول مبدأ مختصات باشد مختصات (x, y) را بر حسب (x', y') بیویید .

حل- کافی است $R_{-\theta}$ را در $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ضرب کنیم :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

که پس از ضرب می شود :

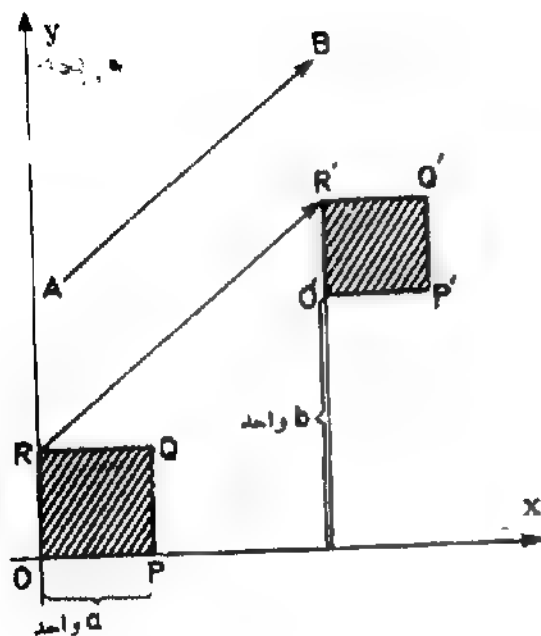
$$\begin{cases} x = x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ y = -x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

ماتریس انتقال - برای هر بردار $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ تابع زیر را داریم :

$$T: R^1 \rightarrow R^1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$$



را که بنام انتقال دو امتداد بردار
 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ موسوم است متناظر می‌کنیم.

این تبدیل با استفاده از ضرب
 ماتریسهای 2×2 انجام پذیر نیست زیرا،
 مثلاً، نقطه $(0,0)$ تحت ماتریس 2×2
 برخوردش منطبق می‌شود دو صورتی که در
 انتقال، نقطه $(0,0)$ تغییر مکان پیدا
 می‌کند. اما اگر بعنوان مثال ماتریس
 3×3 زیر را در نظر بگیریم:

$$T_{(a,b)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

و توجه کنیم که:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

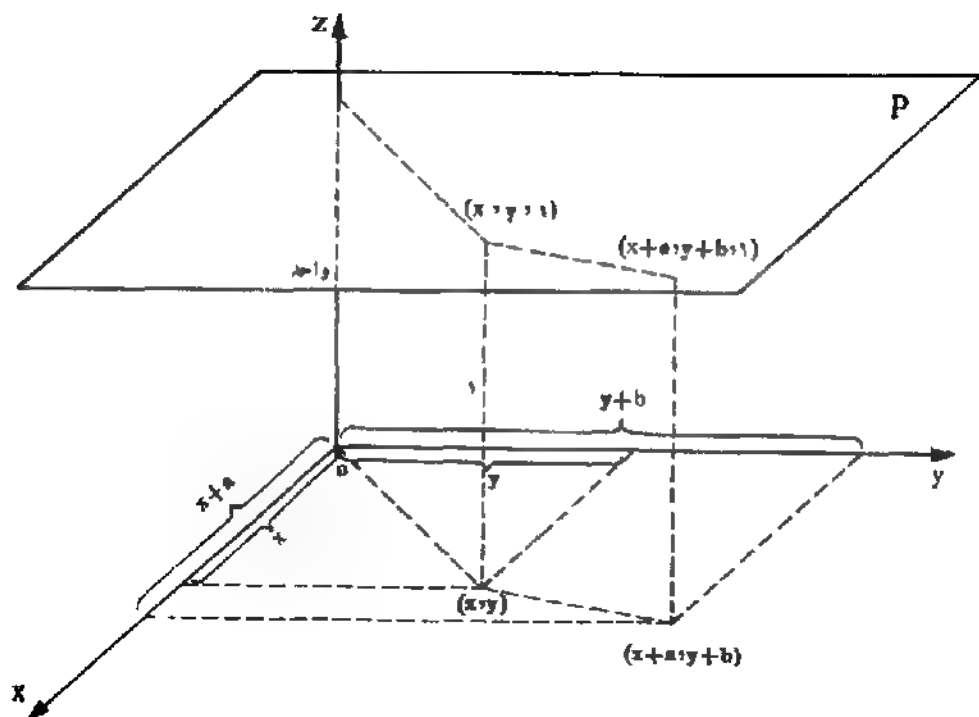
ماتریس $T_{(a,b)}$ هر نقطه از صفحه موازی xoy و ارتفاع واحد را به نقطه $\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix}$

از این صفحه می‌برد اما نقطه $\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix}$ تصویر قائم نقطه $\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix}$ بر صفحه xoy است

و این مانند این است که ماتریس $T_{(a,b)}$ هر نقطه (x,y) از xoy را به نقطه $(x+a, y+b)$

می‌برد. به عبارت دیگر هر بردار انتقال $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ دو صفحه متناظر است با ماتریس $T_{(a,b)}$ بنا بر این

ماتریس $T_{(a,b)}$ را ماتریس انتقال دو صفحه می‌خوانند.



مثال - ماتریس انتقال نظیر بردار $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ عبارتست :

$$T_{(-1,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این ماتریس هر نقطه $(x, y, 1)$ از صفحه موازی با xoy و پارتیاع يك را به نقطه $(x-1, y+3, 1)$ تبدیل می کند همچنین ملاحظه می کنیم که :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y+3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y+3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیلهای متوالی (ماتریس ترکیبهای متوالی) - فرض کنیم نقطه (x, y) تحت

ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به نقطه (x', y') و نقطه (x', y') تحت ماتریس $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ به نقطه

(x'', y'') تبدیل شود یعنی :

$$(1) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

هرگاه در (۲) بجای x' و y' مفاد پرشان از (۱) را قرار دهیم خواهیم داشت :

$$(3) \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

$$(4) \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

تساوی (۴) نشان می‌دهد که ماتریس $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مستقیماً نقطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$

مستقل می‌کند و این در حالت کلی قابل تعمیم است. یعنی هرگاه نقطه A_0 تحت ماتریس T_1 به A_1 و A_1 تحت T_2 به A_2 و نقطه A_2 تحت T_3 به A_3 و \dots و A_{n-1} تحت T_n به A_n متوالی شوند خواهیم داشت:

$$(1) T_1 A_0 = A_1; (2) T_2 A_1 = A_2; (3) T_3 A_2 = A_3, \dots, (n) T_n A_{n-1} = A_n$$

اگر در تساوی (۲) بجای A_1 مقدارش را از تساوی (۱) قرار دهیم و سپس در (۳) بجای A_2 مقدارش را بگذاریم و به همین ترتیب ادامه دهیم می‌شود:

$$a - T_2(T_1 A_0) = A_2$$

$$(T_2 T_1) A_0 = A_2$$

$$b - T_3(T_2 T_1) A_0 = A_3$$

$$a - [T_n(T_{n-1} \dots T_2 T_1)] A_0 = A_n$$

یعنی ماتریس $T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1$ مستقیماً نقطه A_0 را به A_n می‌برد.

تبصره - اگر معادلات تبدیلات خطی (۱) و (۲) را بنویسیم و همان کاری را که در مورد ماتریس انجام دادیم در مورد معادلات نیز انجام دهیم یعنی در (۲) بجای x' و y' مقادیری از (۱) قرار دهیم و سپس ساده کرده معادله ماتریسی آن را بنویسیم نتیجه می شود:

$$\begin{bmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

که با مقایسه (۲) و توجه به اینکه هر تبدیل در صفحه تنها يك ماتریس متناظر دارد نتیجه می شود

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{bmatrix}$$

که خود توجیهی برای عمل ضرب ماتریسهای 2×2 است.

مثال - با استفاده از دورانهای متوالی، سمتهای مثلثاتی $\cos(\alpha+\beta)$ ، $\sin(\alpha+\beta)$ را به دست آورید.

حل - فرض کنیم نقطه (x, y) تحت دوران R_α به نقطه (x', y') و نقطه (x', y') تحت

دوران R_β به نقطه (x'', y'') تصویر شده باشد. یعنی:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

پس آنچه گفته شد $R_\beta R_\alpha$ ، مستقیماً نقطه (x, y) را به (x'', y'') تبدیل می نماید. یعنی:

$$\left(\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \quad (1)$$

در اینجا به نقطه (x, y) دو دوران متوالی، هم جهت و مثبت باندازه های α و β حول O داده ایم. بنابراین مثل این است که ما به (x, y) مستقیماً دورانی به اندازه $(\alpha+\beta)$ داده ایم. یعنی ماتریس $R_{(\alpha+\beta)}$ نقطه (x, y) را مستقیماً روی (x'', y'') تصویر می کند.

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \quad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) و توجه باینکه تساوی به دست آمده برای همه مقادیر (x, y) از جمله

برای $(1, 0)$ نیز درست است خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و یا پس از ضرب دوماتریس مربع طرف راست می شود :

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \\ \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \sin \alpha + \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و یا پس از ضرب به دست می آید :

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{bmatrix}$$

که با توجه به تعریف دوماتریس حاصل می شود :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

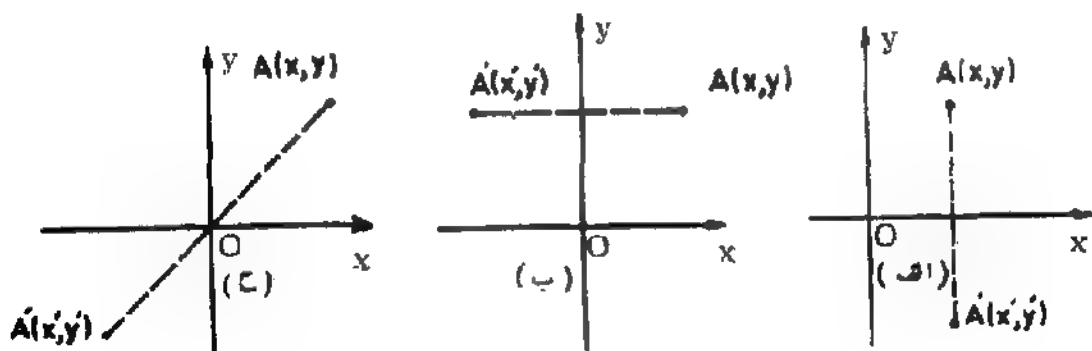
ماتریس تقارن نسبت به محورها و مبدا مختصات - مرتبیل خطی در صفحه را به صورت

زیر نشان دادیم :

$$\begin{cases} ax + by = x' \\ cx + dy = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

هرگاه قرینه (x, y) را به ترتیب از چپ به راست نسبت به محور x ها ، y ها و مبدا

مختصات به دست آوریم خواهیم داشت :



در الف ، طولهای A و A' مساوی بوده ولی عرضهای آنها فرینه یکدیگرند پس معادلات تقارن نسبت به محور x ها عبارتست :

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

در ب ، عرضهای A و A' مساوی بوده ولی طولهای آنها فرینه یکدیگرند پس معادلات تقارن نسبت به محور y ها عبارتست :

$$\begin{cases} -x = x' \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1x + 0y = x' \\ 0x + 1y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

در ج ، طولها و عرضهای A و A' هردو فرینه یکدیگرند :

$$\begin{cases} -x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرائب ، درحالات فوق ، بهترتیب ماتریس تقارن نسبت به محور x ها ، y ها و مبدأ مختصات است .

ماتریس تقارن نسبت به خط - همانطور که در مورد ماتریس انتقال در صفحه دیدیم ، ماتریسهای تقارن نسبت به محورها و مبدأ مختصات در صفحه ای به ارتفاع واحد و موازی صفحه xoy چنین است :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{محور } x} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{محور } y} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مبدأ}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

زیرا ، هر يك از این ماتریسها نقطه $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ از صفحه موازی xoy را به $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$ درآورد

صفحه تبدیل می کند که تصویر قائم آن بر صفحه xoy عبارتست از $(x'$ و $y')$. بنابراین مثل این است که هر يك از ماتریسهای 3×3 بالا نقطه $(x$ و $y)$ را بر $(x'$ و $y')$ تصویر می نماید .
الف - تقارن نسبت به خط $y = a$ - برای تعیین ماتریس تقارن نسبت به خط $y = a$ به

ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱- با انتقال $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}$ ، خط $y=a$ را بر محور x ها منطبق می‌کنیم . ماتریس این انتقال

$T_{(0,0)}$ می‌باشد : که هر نقطه (x, y) را به صورت زیر منتقل می‌کند :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y-a \\ 1 \end{bmatrix}$$

۲- فرینه تصویر جدید را نسبت به محور x ها در صفحه موازی xoy به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ a-y \\ 1 \end{bmatrix}$$

۳- با انتقال $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$ صفحه را به حالت اول برمی‌گردانیم .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ a-y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ a-y \\ 1 \end{bmatrix}$$

نقطه $(x, a-y)$ فرینه (x, y) نسبت به $y=a$ بوده و ماتریسی که این تبدیل انجام

می‌دهد حاصلضرب سه ماتریس فوق است .

ماتریس تقارن نسبت به خط $y=a$ برابر است با :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ب- ماتریس تقارن نسبت به خط $x=a$ به در اینجا ابتدا به صفحه انتقال $T_{(0,0)}$

می‌دهیم تا خط بر محور y ها قرار گیرد ، سپس فرینه نقاط صفحه را نسبت به محور y ها به دست

می‌آوریم و در آخر با انتقال $T_{(0,0)}$ صفحه را به حالت اول برمی‌گردانیم ماتریس ترکیب

این سه تبدیل حاصلضرب این سه ماتریس است .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ج- ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$ - اگر چه تعیین این ماتریس به صورت‌های

موق مبسر است ، ولی ما در اینجا از روشی که در سال دوم برای ماتریس دوران گفته ایم استفاده

می‌کنیم . خط مزبور به صورت $y = x \tan \theta$ ، که با محور x زاویه θ می‌سازد در شکل زیر

نرسیده نقطه $P(1,0)$ نسبت به خط

$y = x \tan \theta$ ، نقطه P' است که مختصات

آن با استفاده از مثلث OKP' به صورت

زیر به دست می‌آید :

$$x_{P'} = OK = 1 \times \cos 2\theta = \cos 2\theta$$

$$y_{P'} = KP' = 1 \times \sin 2\theta = \sin 2\theta$$

$P \rightarrow P'$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}$$

که بنابر آنچه در سال دوم دیدید ستون چپ ماتریس تقارن در خط مزبور است . همچنین غریبه

نقطه $Q(0,1)$ نسبت به خط $y = x \tan \theta$ ، نقطه Q' است که مختصات آن با استفاده از مثلث

OKQ' ، شکل زیر ، قابل محاسبه است.

$$x_{Q'} = OK = 1 \times \cos(90 - 2\theta) = \sin 2\theta$$

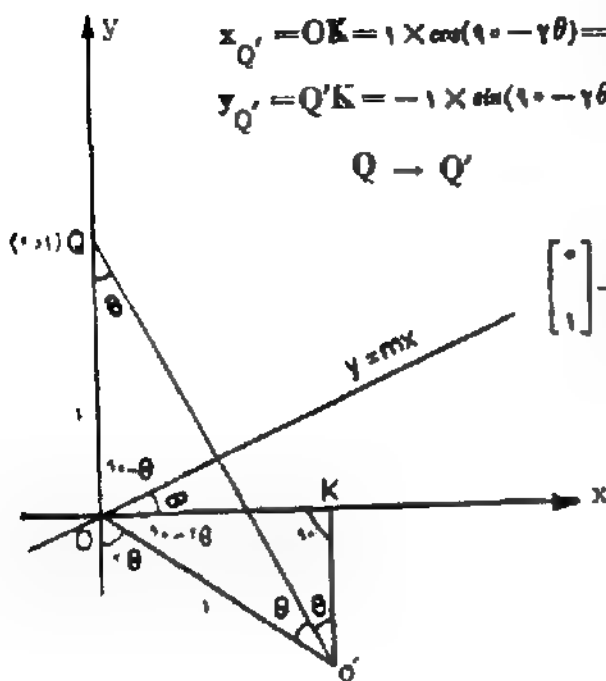
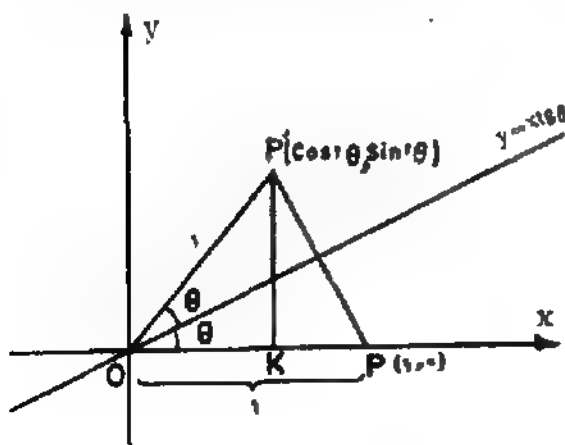
$$y_{Q'} = Q'K = -1 \times \sin(90 - 2\theta) = -\cos 2\theta$$

$Q \rightarrow Q'$

یعنی :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$Q'(\sin 2\theta, -\cos 2\theta)$$



که طبق آنچه در سال دوم دیدید ستون راست ماتریس تقارن در خط $y = x \tan \theta$ است. بنابراین ماتریس تقارن در خط $y = x \tan \theta$ عبارتست:

$$S_1 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

لذا اگر $\theta = 0^\circ$ ، $\theta = 45^\circ$ ، $\theta = 90^\circ$ یا $\theta = 135^\circ$ بگیریم، بتدریج ماتریس تقارن در محور x ها، در خط $y = x$ در محور y ها و در خط $y = -x$ به دست می آید. لذا اگر S_1 ماتریس فوق، در ترکیب با ماتریس انتقال به صورت زیر نوشته می شود:

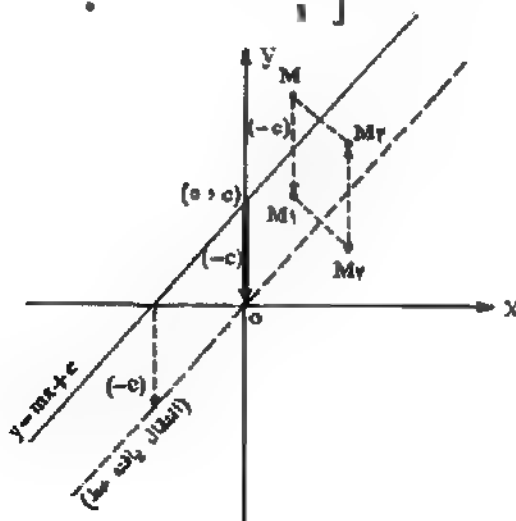
$$S_1 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

د - ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx + c$ - برای تعیین ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx + c$ کافی است با انتقال $T(0, -c)$ خط را به صورت $y = mx$ بیرون آورده، و با استفاده از ماتریس قبل ماتریس تقارن در این خط را بتوسیم و سپس با انتقال $T(0, c)$ صفحه را به وضع اول برمی گردانیم ماتریس مزبور با این صورت محاسبه میشود.

$$S = T(0, c) \times S_1 \times T(0, -c)$$

$$S = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T(0, c)} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T(0, -c)} \quad \text{و یا:}$$

$$S = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & -c \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & c(1 + \cos 2\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{که پس از محاسبه حاصل میشود:}$$



ماتریس متعامد - ماتریس وارون پذیر A را يك ماتریس متعامد نامند هرگاه A^{-1} برابر
 ترانهاداش A' باشد، بعبارت دیگر $A^{-1} = A'$.
 هر يك از ماتریسهای زیر متعامد است.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ +\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

زیرا:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ +\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ویژگیهای ماتریس متعامد

۱- فرض کنیم A و B دو ماتریس متعامد هم مرتبه باشند بنابه تعریف داریم:

$$AA' = A'A = I \text{ و } BB' = B'B = I$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} (AB)(AB)' &= ABB'A' \\ &= A(BB')A' \end{aligned}$$

$$=AIA'$$

$$=AA'$$

$$=I$$

یعنی حاصلضرب دو ماتریس متعامد هم مرتبه خود يك ماتریس متعامد است .

۲- معكوس يك ماتریس متعامد و ترانهاذه يك ماتریس متعامد خودماتریسهای متعامدند. (چرا؟)

۳- دترمینان يك ماتریس متعامد برابر ± 1 است زیرا :

$$AA' = I \Rightarrow |A| \cdot |A'| = |I|$$

چون دترمینانهای A و A' برابرند پس :

$$|A||A| = |I| \Rightarrow |A|^2 = |I| \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

۴- ماتریسهای متعامد هم مرتبه با عمل \times تشکیل يك گروه می دهند. (چرا؟)

طول بردار مكان

در هندسه تحلیلی دیده اید ، که اگر V_x و V_y دو بردار باشند که بردار مكان آنها

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ باشد داریم :}$$

$$V_x = |V_x| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (1)$$

$$V_y = |V_y| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

از طرفی باتوجه به تعریف ترانهاذه داریم :

$$X'X = [x \ y] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + y^2 \quad (2)$$

بامقایسه (۱) و (۲) :

$$|V_x| = (X'X)^{\frac{1}{2}}$$

همچنین در هندسه خوانده اید که

$$\vec{V}_x \cdot \vec{V}_y = xx_1 + yy_1 \quad (3)$$

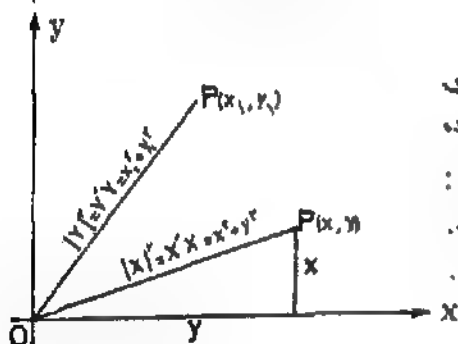
و در محاسبات ماتریس نیز داریم :

$$X'Y = [x \ y] \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = xx_1 + yy_1 \quad (4)$$

با مقایسه (۳) و (۴) :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = X'Y$$

و با توجه به تعریف ضرب اسکالر ، شرط لازم و کافی برای آنکه دو بردار X و Y برهم عمود باشند آن است که $X'Y = 0$.



تبدیل متعامد و ویژگیهای آن - هر تبدیلی

که ماتریس متناظر آن متعامد باشد تبدیل متعامد نامیده می شود . این تبدیلات دارای ویژگیهای زیرند :

۱- تبدیلهای متعامد طول را ثابت نگه میدارند.

۲- تبدیلهای متعامد زاویه را ثابت نگه میدارند.

برهان : ۱- اگر X برداری باشد که تحت تبدیل متعامد A قرار گرفته باشد، داریم :

$$X'X = \text{مربع طول بردار } X$$

اگر تبدیل یافته X تحت ماتریس A را Y بخوانیم داریم :

$$AX = Y \text{ و } X'A' = Y'$$

با توجه به این تساویها می نویسیم :

$$Y'Y = X'A'AX = \text{مربع طول } Y$$

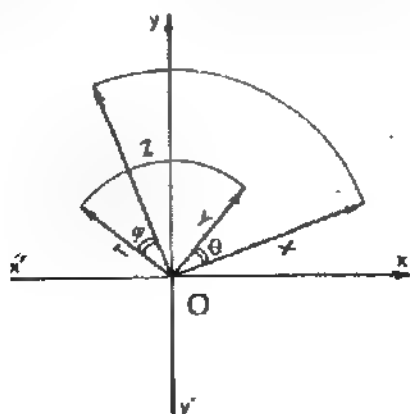
$$= X'IX$$

$$= X'X = \text{مربع طول } X$$

۲- مرگه θ زاویه بین دو بردار X و Y و φ زاویه بین دو بردار Z و T ، تبدیل یافته

آنها تحت تبدیل متعامد A باشد داریم :

$$\begin{cases} Z = AX \text{ و } Z' = X'A' \\ T = AY \text{ و } T' = Y'A' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |Z| = (Z'Z)^{\frac{1}{2}} = (X'X)^{\frac{1}{2}} = |X| \\ |T| = (T'T)^{\frac{1}{2}} = (Y'Y)^{\frac{1}{2}} = |Y| \end{cases} \quad (1)$$



از طرفی ، طبق تعریف ضرب داخلی داریم :

$$X \cdot Y = |X| \cdot |Y| \cdot \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{X \cdot Y}{|X| \cdot |Y|}$$

و یا با توجه به مطالب خوانده شده :

$$\cos \theta = \frac{X'Y}{|X||Y|} \quad (۲)$$

و همین ترتیب زاویه بین Z و T بدست می آید :

$$\cos \varphi = \frac{Z'T}{|T| \cdot |Z|} = \frac{X'A'AY}{|T| \cdot |Z|} = \frac{X'Y}{|X| \cdot |Y|} \quad (۳) \quad \text{چرا؟}$$

از مقایسه (۲) و (۳) نتیجه می شود: $\cos \varphi = \cos \theta$ که با توجه به محدب بودن زاویه ها داریم: $\varphi = \theta$

شرایط متعامد بودن یک ماتریس 2×2 - ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مروضات هرگاه

A بخواهد متعامد باشد باید دو شرایط زیر صدق کند :

$$A'A = I \text{ و } AA' = I$$

$$A'A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴ :

$$\begin{bmatrix} a'+c' & ab+cd \\ ab+cd & b'+d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از تساوی این دو ماتریس نتیجه می شود :

$$\begin{cases} a'+c'=1 \\ ab+cd=0 \\ b'+d'=1 \end{cases} \quad (۱)$$

اگر $a' \geq 0$ ، $c' \geq 0$ و چون $a'+c'=1$ پس $a' \leq 1$ و $c' \leq 1$

و $a' \leq 1$ و یا $a \leq 1$ و $-1 \leq a \leq 1$ و همچنین ترتیب $-1 \leq b \leq 1$ و $-1 \leq d \leq 1$.
بنابراین می‌توان فرض کرد که :

$$a = \cos \theta, \quad b = \cos \varphi, \quad c = \sin \theta, \quad d = \sin \varphi \quad (2)$$

این مقادیر را در دو معین تساوی دستگاه قرار داده و جوابها را در فاصله 0 تا π به دست می‌آوریم :

$$\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = 0 \Rightarrow \cos(\theta - \varphi) = 0$$

$$\theta - \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \theta - \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$\theta - \varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \theta - \frac{3\pi}{2} \quad (4)$$

بنابراین فقط دو ماتریس مربع مرتبه ۲ متعامد وجود دارد و آنها عبارتند از :

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

که A ماتریس دورانی با اندازه θ حول مبدأ محتمات و غیر متقارن است و B ماتریس تعارن نسبت به خط $y = x \tan \frac{\theta}{2}$ و متقارن است. در رابطه‌های A و B با استفاده از معروضات (۲) و شروط (۳) و (۴) معایبه شده‌اند. از محاسبه AA' نیز به همین نتیجه می‌رسیم.

نتیجه : هرگاه ماتریس مرتبه ۲، A متعامد بوده و X و Y دو ستون آن باشند آنگاه $X'X = 1$ و $Y'Y = 1$ و $X'Y = 0$ و بالعکس اگر برای يك ماتریس مرتبه ۲، A با ستونهای X و Y داشته باشیم بطوریکه $X'X = 1$ ، $Y'Y = 1$ ، $X'Y = 0$ آنگاه A يك ماتریس متعامد است (چرا ؟)

بصورتی باید توجه داشت که فقط دو نوع ماتریس متعامد مرتبه دوم وجود دارد و ماتریسهای دیگری که در تعریف متعامد صدق می‌کنند ولی شکل ظاهری آنها به صورت فوق نیست با قدری تأمل قابل تبدیل به یکی از صورتهای بالاست. مثلاً :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ يك ماتریس متعامد است که زاویه دوران آن } \theta - \text{ است.}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \text{ يك ماتریس متعامد است که از تعویض ستونهای } A \text{ با هم به دست}$$

می‌آید يك ماتریس متعامد است (در تعریف متعامد صدق می‌کند) ولی ظاهراً نه ماتریس دوران

است و نه تقارن در يك خط مفروض. اما دوزير می بیند كه B_1 يك ماتريس تقارن نسبت به خطی است كه با محور x زاویه $\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$ می سازد.

$$B_1 = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} + \theta) & \sin(\frac{\pi}{4} + \theta) \\ \sin(\frac{\pi}{4} + \theta) & -\cos(\frac{\pi}{4} + \theta) \end{bmatrix}$$

۳- ماتريس A_1 كه از تمویض متونهای B به دست می آید باز به ظاهر با صورتهای A و B فرق دارد، اما در زیر دیده می شود كه A_1 نیز متعامد از نوع دوران است.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{3\pi}{4} + \theta) & -\sin(\frac{3\pi}{4} + \theta) \\ \sin(\frac{3\pi}{4} + \theta) & \cos(\frac{3\pi}{4} + \theta) \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه: تبدیل یافته بردارهای $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

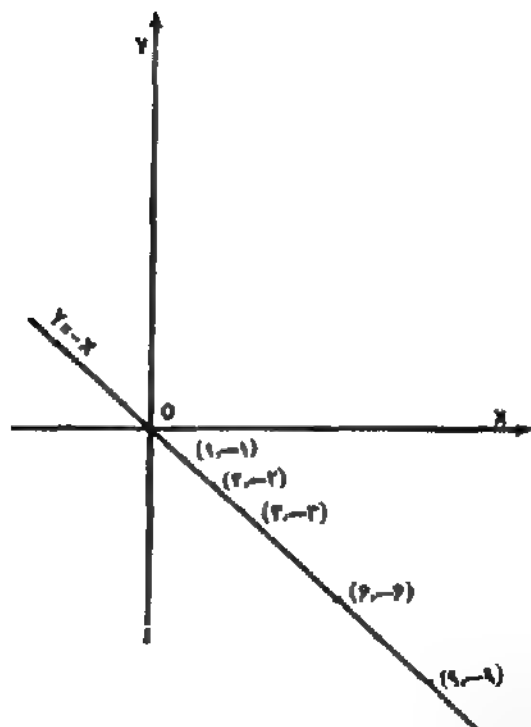
تحت ماتريس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

در شكل صفحه بعد دیده می شود كه بردارهای داده شده و تبدیل یافته های آنها هم دارای امتداد مشترك $y = -x$ هستند. یعنی امتداد این بردارها پس از تبدیل تغییر نكرده است. در



اینجا عدد ۳ و بردارهای داده شده دارای اسامی خاصی هستند که بعداً خواهیم دید. آنچه از تساویهای بالا نتیجه می شود این است که این بردارها دارای خاصیت مهم زیرند: ($k=3$)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1)$$

برای تعیین k در حالت کلی و یا برای تعیین تمام بردارهایی که امتداد آنها تحت یک ماتریس

$$\text{مثلاً } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \text{ ثابت می ماند چنین عمل می کنیم:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-k)x + 2y = 0 \\ -3x + (-1-k)y = 0 \end{cases}$$

شرط وجود جوابهای غیر از صفر برای این دستگاه معادلات همگن صفر بودن دترمینان

ماتریس ضرایب آن است یعنی:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ -3 & -1-k \end{vmatrix} = 0$$

واز آنجا داریم:

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow (k-1)(k-2) = 0 \Rightarrow (k=1 \text{ یا } k=2)$$

اگر $k=2$ ، امتداد بردارها عبارتند:

$$(2-k)x = -2y \Rightarrow (2-2)x = -2y \Rightarrow 2x = -2y \Rightarrow \boxed{y = -x}$$

اگر $k=1$ ، امتداد بردارها عبارتند:

$$(2-k)x = -2y \Rightarrow (2-1)x = -2y \Rightarrow 3x = -2y \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}x}$$

اکنون با توجه به مطالب فوق تعاریف زیر می آوریم:

تعریف: فرض کنیم $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \vec{0}$ یک بردار و k یک عدد حقیقی باشد به نامی که:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$AX = kX$$

یا

در این صورت k را یک مقدار ویژه یا یک ریشه سرشمنای ماتریس A و $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را بردار

ویژه نظیر k می نامند. برای تعیین k در حالت کلی، طرف راست معادله ماتریسی را در I_p ضرب می کنیم می شود:

$$AX = kI_p X$$

و یا:

$$(A - kI_p)X = \vec{0}$$

و یا:

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{0}$$

که پس از ضرب می شود:

$$\begin{cases} (a-k)x + by = 0 \\ cx + (d-k)y = 0 \end{cases}$$

و شرط جوابهای غیر از صفر، برای این دستگاه معادلات همگن، صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایبش است:

$$\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-k)(d-k) - bc = 0 \quad \text{و یا:}$$

$$\boxed{k^2 - (a+d)k + (ad-bc) = 0} \quad \text{و یا: (۱)}$$

معادله (۱) را معادله سرشتناماتی (مشخصه) ماتریس A نماند.

اگر $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه ماتریس A باشد، برای هر $m \in \mathbb{R}$ ،

$$m \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mx_1 \\ my_1 \end{bmatrix}$$

همین یک بردار ویژه است زیرا:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mx_1 \\ my_1 \end{bmatrix} &= m \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \\ &= mk \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} mx_1 \\ my_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نتیجه، هرگاه $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه ماتریس A باشد، هر ضرب آن نیز یک بردار ویژه ماتریس

A است.

مثال- مطلوبست تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر آن برای ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

حل- داریم:

$$AX - kI, X = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \bar{0} \quad (۱)$$

اگر در مینان ماتریس ضرایب این دستگاه همگن برابر صفر باشد، آنگاه جوابهای غیر از صفر برای دستگاه موجود است:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = k^2 - 2k - 3 = 0$$

$$(k-3)(k+1) = 0 \Rightarrow k = 3 \text{ و } k = -1$$

و جوابهای کلی برای بردارهای ویژه، با توجه به معادله (۱)، عبارتند:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = m_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = m_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

خاصیتی برای بردارهای ویژه يك ماتریس متقارن: بردارهای ویژه ماتریس متقارن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ را محاسبه می کنیم:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = kx \\ 2x - 2y = ky \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-k)x + 2y = 0 \\ 2x - (2+k)y = 0 \end{cases}$$

شرط وجود جوابهای غیر صفرا برای این دستگاه معادلات همگن می نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & -(k+2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(1-k)(k+2) - 4 = 0 \Rightarrow k^2 + k - 6 = 0$$

$$\Rightarrow k = 2 \text{ یا } k = -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ اما متناظر با } k = 2, \text{ بردار ویژه } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و متناظر با } k = -3 \text{ بردار ویژه } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

است که حاصلضرب اسکالر آنها برابر صفر است.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

یعنی دو بردار برهم عمودند و این مطلب در حالت کلی نیز درست است.

قضیه - فرض کنیم A يك ماتریس متقارن باشد که دو مقدار ویژه متفاوت λ و μ دارد هرگاه X

و Y به ترتیب بردارهای ویژه متناظر با λ و μ باشند آنگاه X و Y برهم عمودند.

برهان - چون X و Y بردارهای ویژه هستند داریم:

$$AX = \lambda X \quad (1)$$

$$AY = \mu Y \quad (2)$$

طبق خاصیت‌های ماتریس ترانپوز (۲) به دست می‌آید:

$$Y'A' = \mu Y' \quad (3)$$

طرفین (۳) را از طرف راست در X ضرب می‌کنیم:

$$Y'A'X = \mu Y'X$$

که با توجه به (نقارن A) به دست می‌آید:

$$Y'AX = \mu Y'X$$

$$\lambda Y'X = \mu Y'X$$

طبق (۱):

پس:

$$\lambda Y'X - \mu Y'X = 0$$

$$(\lambda - \mu)Y'X = 0$$

چون $\lambda \neq \mu$ پس:

$$Y'X = 0$$

یعنی X و Y برهم عمودند.

قضیه - برای هر ماتریس 2×2 مانند A که دارای مقادیر ویژه متمایز است ماتریس V وجود دارد به قسمی که $AV = VD$ که در آن D یک ماتریس قطری است.

برهان - فرض کنیم λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه ماتریس A و $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ بردارهای

ویژه متناظر با آنها باشد در این صورت داریم:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

دورابطه بالا را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$A \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$$

از جمع دورابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$A \left(\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & 0 \\ \lambda_1 y_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda_2 x_2 \\ 0 & \lambda_2 y_2 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 & \lambda_2 y_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس طرف راست تساوی را به صورت حاصلضرب دو ماتریس می‌نویسیم:

$$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

اگر فرض کنیم $V = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ در این صورت خواهیم داشت:

$$AV = VD \quad (1)$$

ضمناً ملاحظه می‌کنید که ستونهای ماتریس V بردارهای ویژه A و درایه‌های قطری اصلی D مقادیر ویژه متناظر با این بردارها هستند.

چون مقادیر ویژه ماتریس A مساوی نیستند بردارهای ویژه متناظر با آنها بزرگ امتداد

نوده و در این صورت $x_1 \neq x_2$ خواهد بود و در نتیجه خواهیم داشت، $x_1 y_2 - y_1 x_2 \neq 0$ یعنی

$|V| \neq 0$ و V وارون پذیر است. پس اگر رابطه (۱) را از سمت چپ در V^{-1} ضرب کنیم

$$V^{-1}AV = D \quad (2)$$

نتیجه میشود:

نتیجه: برای هر ماتریس متقارن 2×2 مانند A با دو مقدار ویژه غیر مساوی ماتریس

متعامد V وجود دارد به قسمی که $V^{-1}AV = D$. چرا؟

تصوره: فرض می‌کنیم بردارهای ویژه ماتریس متقارن A (ماتریس 2×2) عبارت باشند از:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Y = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

عمل برای تعیین ماتریس V ، طول بردارهای X و Y را به واحد تبدیل کرده، ستونهای ماتریس V قرار می‌دهیم یعنی:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \\ \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} & \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad V = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} & \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \\ \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} & \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \end{bmatrix}$$

ملاحظه میشود که $VV' = I$ یعنی V متعامد است.

ماتریس شکل درجه دوم و مقاطع مخروطی: یک شکل درجه دوم ممکن را به صورت زیر

تعریف میکنیم:

$$Q(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2$$

اما اگر $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}$ ، يك ماتریس متقارن باشد، آنگاه داریم:

$$X'AX = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (X' \text{ ترانپازه } X \text{ است})$$

$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + hy \\ hx + by \end{bmatrix}$$

$$= ax^2 + 2hxy + by^2 = Q(x,y)$$

ماتریس متقارن:

$$A = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}$$

در بنام ماتریس شکل درجه دوم $Q(x,y)$ می‌خوانند و می‌نویسند:

$$Q(x,y) = X'AX$$

از ماتریس $X'AX$ استفاده نموده معادله مقاطع مخروطی همگن (مرکز در مبدأ مختصات):

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = c$$

را به شکل زیر می‌نویسند:

$$X'AX = c \iff \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c$$

تبدیل متعامد $X_1 = V'X$

دیدیم که اگر V ماتریس متعامد باشد تبدیل: $X \rightarrow X_1 = V'X$ (۱)

که نقطه (x,y) را روی (x_1,y_1) تصویر می‌نماید يك تبدیل متعامد است. اکنون در شکل درجه

دوم:

$$Q(x,y) = X'AX$$

۱- این تبدیل، در حقیقت دوران محوره، به زاویه θ حول مبدأ مختصات است که برای دوران

θ - صفا است.

بجای X و X' مقادیرشان را از (۱) قرار می‌دهیم:

$$Q_1(x_1, y_1) = (VX_1)'AVX_1$$

$$Q_1(x_1, y_1) = X_1'V'AVX_1$$

کس که $X_1'V'AVX_1$ خود شکل درجه دوم جدیدی با ماتریس $V'AV$ است، طبق نتیجه صفحه ۱۴۶ می‌توان ماتریس متعامد V را چنان انتخاب کرد که $V'AV$ یک ماتریس قطری باشد، $V'AV = D$ و درایه‌های قطر D مقادیر ویژه A باشند:

$$V'AV = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{یا } V'AV = D = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

این تبدیل، شکل درجه دوم را به صورت زیر بیرون می‌آورد:

$$\begin{aligned} Q_1(x_1, y_1) &= X_1'V'AVX_1 = X_1'DX_1 = X_1' \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} X_1 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 \text{ یا } \lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 y_1^2 \end{aligned}$$

یعنی تبدیل خطی، $X_1 = V'X$ ، شکل درجه دوم $Q(x, y)$ را به صورت جدید:

$$Q_1(x_1, y_1) = (\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2) \text{ یا } (\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 y_1^2)$$

بیرون می‌آورد که در آن λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

نتیجه تبدیل $X_1 = V'X$ مقطع مخروطی $X'AX = c$ را به داخل یک مقطع مخروطی

که محورهای اصلی آن همان محورهای مختصات جدید است تبدیل می‌کند.

$$X'AX = c \iff ax^2 + 2hxy + by^2 = c \xrightarrow{X_1} \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = c$$

یا

$$\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 y_1^2 = c$$

صورت‌های $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = c$ را شکل استاندارد (استانده) مقاطع مخروطی می‌خوانند.

مثال - مقطع مخروطی $x^2 - 2xy - 2y^2 = 2$ را با استفاده از تبدیل $X \rightarrow X_1 = V'X$

صورت استاندارد بنویسید.

حل - داریم:

$$Q(x, y) = x^2 - 2xy - 2y^2$$

$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

در اینجا ماتریس A برابر است با:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

و معادله سرشتی‌های آن عبارتست:

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (1-2)\lambda + (-2-2) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$$

بنابراین تبدیل $X \rightarrow X_1 = V'X$ معادله مقطع داده شده را به داخل مقطع

تبدیل می‌نماید که V ، با توجه به بردارهای

خاص λ_1 و λ_2 بصورت زیر به دست می‌آید:

$$AX = \lambda X$$

$$(A - \lambda I)X = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{0}$$

و با پس از ضرب و فاکتورگیری خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (-2-\lambda)y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

بازاء $\lambda = 2$ معادله (۱) به صورت $y = -\frac{1}{4}x$ می‌یرونیم. آید که یکی از بردارهای ویژه آن بازای

$x = -2$ عبارتست از $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و بازای $\lambda = -3$ همان معادله به صورت $y = 2x$ می‌یرونیم. آید که

یکی از بردارهای ویژه آن بازای $x = 1$ برابر است با $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ که از آنها، با توجه به نصیبه صفحه

۱۴۶ ماتریس V را تشکیل می‌دهیم:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

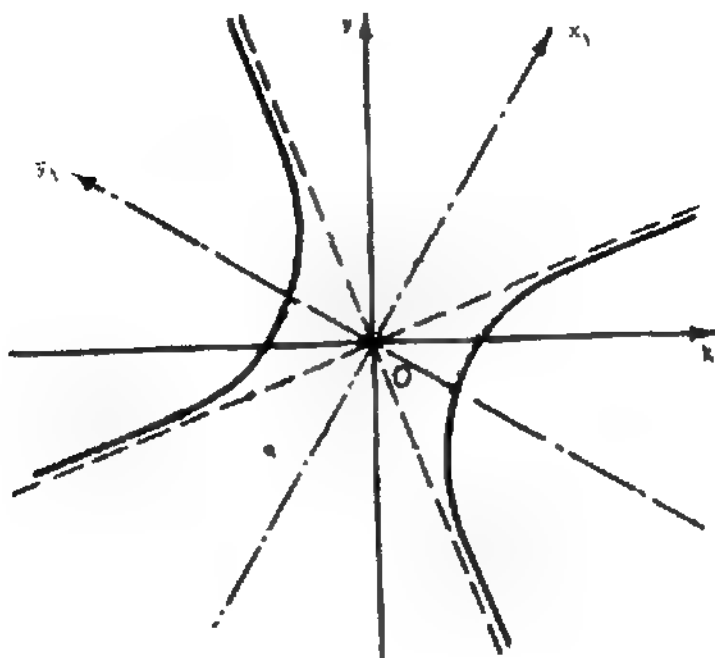
$$X = VX_1$$

و معادلات تبدیل عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \end{cases} \quad (1)$$

اگر در معادله $x^2 - 4xy - 2y^2 = 3$ بجای x و y مقادیرشانرا قرار دهیم معادله

$$2y_1^2 - 3x_1^2 = 3$$



و اگر تبدیل را به صورت $X \rightarrow X_1 = V'X$ در نظر بگیریم بدستگاه معادلات زیر خواهیم رسید:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & +\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & +\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \\ y_1 = \frac{-2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \end{cases} \quad (1)$$

همانطور که در شکل می بینید، دستگاه (۱) معادلات دوران محورهای حول مبدأ مختصات و

به اندازه $\theta = \text{Arc cos } \frac{1}{\sqrt{5}}$ می باشد. بنابراین مقطع داده شده با دوران محورهای به صورت $xy^2 - 2x^2 = 3$ که يك هذلولی است و محورهای اصلی آن بر محورهای مختصات جدید منطبق است درمی آید (شکل صفحه قبل).

شکل ماتریسی درجه دوم غیر همگن: شکل درجه دوم غیر همگن را به صورت زیر تعریف

می کنیم:

$$Q(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c \quad (1)$$

که شکل ماتریسی آن به صورت زیر است: (بجای عبارت $ax^2 + 2hxy + by^2$ شکل $X'AX$ نوشته شده است).

$$Q(x,y) = X'AX + BX + c \quad \text{و} \quad B = [2g \quad 2f] \quad (2)$$

و $Q(x,y) = 0$ معادله مقاطع مخروطی غیر همگن است (مرکز مقطع در مبدأ مختصات نیست). مثال - مقطع زیر را به صورت استاندارد بیرون آورید.

$$x^2 - 2xy - 2y^2 + 6x - 2y + \frac{1}{3} = 0$$

حل - طبق (۲) خواهیم داشت: $B = [2g \quad 2f] = [6 \quad -2]$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{3} = 0$$

حال تبدیل $X_1' \rightarrow X = VX_1$ را بکار برده و بجای $x^2 - 2xy - 2y^2$ با استفاده از

مقادیر ویژه $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ، یعنی λ_1 و λ_2 ، عبارت استاندارد آن را می نویسیم.

$$\left(V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{باید توجه داشت که ماتریس دوران محورهای عبارتست از:})$$

$$2y_1^2 - 2x_1^2 + \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 2\frac{1}{3} = 0$$

$$2y_1^2 - 2x_1^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + 2\frac{1}{3} = 0$$

$$2(y_1 - \frac{8}{\sqrt{5}})^2 - 2(x_1 + \frac{1}{3\sqrt{5}})^2 - 2 = 0$$

و این یک هذلولی است.

تمرین

۱- تبدیل مربع واحد را تحت ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ به دست آورده، نتیجه حاصل را بیان

کنید.

۲- هرگاه داشته باشیم: $\vec{OP} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\vec{OQ} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، اولاً تصویر \vec{OP} ، \vec{OQ} را

تحت هریک از ماتریسهای زیر دست آورید:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ثانیاً تبدیل بردار \vec{PQ} را تحت هریک از این ماتریسها به دست آورید.

۳- مطلوبست تبدیل مثلث ABC ، که در آن $A(0,0)$ و $B(2,1)$ و $C(1,2)$ ، تحت

هر يك از ماتریسهای زیر:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

۴- تبدیل مربع واحد را تحت هر يك از ماتریسهای زیر بدست آورید:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۵- تبدیل زیر را:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

که، $0 < k < 1$ ، برای دایره $x^2 + y^2 = 1$ به کار برده نامنتحی حاصل را بیان کنید.

۶- تبدیل زیر را:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

برای دایره $x^2 + y^2 = 1$ به کار ببرید.

۷- هر گاه داشته باشیم، $P(1, 1, 1)$ و $Q(2, 2, 2)$ تبدیل پاره خط PQ را تحت هر يك

از ماتریسهای زیر بدست آورید:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۸- هر گاه P نقطه دلخواهی از صفحه باشد، ماتریس A نقطه P را روی P' تصویر می نماید

مطابق است تعیین A در حالات زیر: الف- P' قرینه P نسبت به محور xها باشد، ب- P' قرینه

P نسبت به خط $y = x$ باشد، ج- $\vec{OP'} = \vec{OP}$ د- زاویه $\angle P'OP$ برابر 90° باشد،

ه- P' قرینه P نسبت به خط $x = 8$ باشد، و- P' قرینه P نسبت به خط $y = 3x$ باشد،

ز- P' قرینه P نسبت به خط $2y + 3x + 1 = 0$ باشد.

۹- \vec{OP} برداری است که تحت ماتریس $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ ، با اندازه α درجه

در جهت مثبت حول مبدأ دوران می نماید. ماتریسی بنویسید که \vec{OP} را با اندازه β - (جهت منفی) حول O دوران بدهد. از آنجا ماتریس $\alpha - \beta$ را نوشته در رابطه زیر را نتیجه بگیرید:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

۱۰- نشان دهید که:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

و از آنجا $\cos 2\alpha$ و $\sin 2\alpha$ را بر حسب $\cos \alpha$ و $\sin \alpha$ حساب کنید. آیا با این روش می توان $\cos 3\alpha$ و $\sin 3\alpha$ را حساب کرد؟

۱۱- با استفاده از تبدیلات متوالی، بدون عمل ضرب، حاصل های زیر را بنویسید:

الف - $\begin{bmatrix} \cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 75^\circ & -\sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{bmatrix}$

ب - $\begin{bmatrix} \cos 75^\circ & -\sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix}$

ج - $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}^2$

د - $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2$

۱۲- تبدیل مربع واحد را تحت ماتریس $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، که در آن $ad - bc > 0$

به دست آورده ثابت کنید اندازه مساحت شکل تبدیل یافته برابر $|M|$ است.

۱۳- با استفاده از دو ماتریس دوران و ماتریس تقارن دوجوړو (ترکیب تبدیلات) ،
ماتریس تقارن نسبت به خط $y = x \tan \alpha$ را بدست آورید.

۱۴- با استفاده از ترکیب تبدیلات، ماتریس تقارن نسبت به خط $y = x \tan \alpha + c$ را
بدست آورید.

۱۵- ثابت کنید ماتریس حاصل از تقارن نسبت به محور x ها و سپس نسبت به خط
 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ، برابر است با ماتریس دوران حول مبدأ با اندازه زاویه 60° .

۱۶- ماتریس دوران حول مبدأ و در جهت مثبت دوران عبارتست:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

تبدیل نقطه $P \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ را تحت T و به دنبال آن تحت $T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ به دست می آوریم. اولاً

نشان دهید که نتیجه این دو تبدیل متوالی، تقارن نقطه P نسبت به خط $y + x = 0$ می باشد.
ثانیاً تأثیر این دو تبدیل را روی خط $y = 3x - 2$ تعیین کنید. (معادله جدید خط
را بنویسید) .

۱۷- هرگاه $M_\alpha = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$ و $M_\beta = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}$ ،

ماتریسهای تقارن نسبت به خطوط $y = x \tan \beta$ و $y = x \tan \alpha$ باشند. نشان دهید که $M_\beta M_\alpha$
يك ماتریس دوران حول نقطه O خواهد بود که زاویه دوران را حساب خواهید کرد. رابطه ای
بین β و α پیدا کنید به قسمی که $M_\beta M_\alpha = M_\alpha M_\beta$.

۱۸- ثابت کنید که اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ متعامد باشد دو خط زیر بر هم عمودند:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

۱۹- هرگاه A يك ماتریس ضدمتقارن بوده و ماتریسهای $I - A$ و $(I + A)^{-1}$ وارون
پذیر باشند، ثابت کنید ماتریس: $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ يك ماتریس متعامد است. ماتریس B

را وقتی که $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ است به دست آورید.

۲۰- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسهای زیر را در صورت وجود حساب کنید:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

۲۱- ثابت کنید که همه مقادیر ویژه يك ماتریس وارون پذیر مخالف صفر است.

۲۲- هرگاه A يك ماتریس مربع و وارون پذیر باشد، چه ارتباطی بین مقادیر ویژه A و

A^{-1} وجود دارد.

۲۳- یکی از مقادیر خاص ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

برابر ۱۸ است. مقادیر دیگر را پیدا کنید.

۲۴- مقادیر خاص هریك از ماتریسهای زیر را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۲۵- هریك از شكلهای درجه دوم زیر را به صورت ماتریسی بنویسید:

(الف) $x^2 - 2xy + 2xy$ (ب) $2x^2 + 2y^2 - 8xy$ (ج) $-2x^2 - 2xy$

۲۶- مطلوبست محاسبه $X'AX$ برای حالات زیر:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \text{ ب- } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} \text{ الف-}$$

۲۷- شكلهای درجه دوم هریك از ماتریسهای زیر را بنویسید:

$$\text{الف-} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ب-} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۸- [۱- تبدیلهایی متعامد پیدا کنید (در صورت وجود) که هریك از شكلهای درجه دوم را

به صورت استاندارد $ax^2 + by^2$ مبرون آورد:

الف- $5x^2 + 6xy - 2y^2$ ب- $2x^2 + 6xy - 2y^2$ ج- $x^2 + 2xy + y^2$

$$7x^2 + 12xy + 2y^2 - 5 \quad 2x^2 + 8xy + 4y^2 + x - 2y + 5 \quad \text{د}$$

II- صورت استاندارد هریک از این شکلهای درجه دوم را بنویسید.

۲۹- I- یک تبدیل متعامد پیدا کنید (در صورت وجود) که هریک از مقاطع زیر را به صورت استاندارد بیاورد:

$$\text{الف- } 9xy - 1 = 0 \quad \text{ب- } 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y - 11 = 0$$

$$\text{ج- } 2x^2 + 2xy + 5y^2 = 1 \quad \text{د- } 2x^2 + 2y^2 + 6xy - 2x - 2y - 1 = 0$$

II- صورت استاندارد هریک از این مقاطع را بنویسید.

۳۰- اگر U یک ماتریس متعامد باشد نشان دهید احکام زیر هم اریزند.

الف- U متقارن است. ب- $U^2 = I$.

۳۱- اگر یک ماتریس متعامد مثلی باشد ثابت کنید این ماتریس قطری است و همه درایمهای قطرش ± 1 هستند.

۳۲- اگر A متعامد و $I_n + A$ وارون پذیر باشد نشان دهید:

$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$

یاد متقارن است.

۳۳- ثابت کنید هر ماتریس متقارن 2×2 که تفاضل اعداد روی قطر اصلی آن یا یکی از اعداد خارج از قطر مخالف صفر باشد دارای دو مقدار ویژه است.

۳۴- ثابت کنید که ماتریس مرتبه ۲، A در معادله سرشتنامی خود صدق می کند.

$$\text{۳۵- تحقیق کنید ماتریس } A = \frac{1}{1+2a^2} \begin{bmatrix} 1 & -2a & 2a^2 \\ 2a & 1-2a^2 & -2a \\ 2a^2 & 2a & 1 \end{bmatrix} \text{ متعامد است.}$$

۳۶- اگر $A^2 = A$ و $(A - A')^2 = 0$ ثابت کنید:

$$\text{الف- } AA' + A'A = A + A' \quad \text{ب- } (AA')^2 = AA'$$

۳۷- اگر X و Y دو ماتریس مربعی باشد و داشته باشیم $X + Y = XY$ ثابت کنید اگر

X وارون پذیر باشد Y نیز وارون پذیر است و $X^{-1} + Y^{-1} = I$.

مسائل تکمیلی و تزییده‌ای از مسائل امتحانات نهایی سراسر کشور

الف - مسائل مربوط به فصل اول

۱- اگر p متغیر گزاره‌ای و ارزش آن را به $v(p)$ نشان دهیم و قرارداد کنیم که اگر p درست باشد آنگاه $v(p) = ۱$ و اگر نادرست باشد $v(p) = ۰$ ثابت کنید:

$$\text{الف} - v(p) + v(\sim p) = ۱$$

$$\text{ب} - v(p \wedge q) = v(p) \cdot v(q)$$

$$\text{ج} - v(p \vee q) = v(p) + v(q) - v(p)v(q)$$

$$\text{د} - v(p \Rightarrow q) = ۱ - v(p) + v(p) \cdot v(q)$$

$$\text{ه} - v(p \Leftrightarrow q) = ۱ - v(p) - v(q) + ۲v(p) \cdot v(q)$$

۲- نتیجه استنتاج زیر را تعیین کنید.

تیم A برنده می‌شود یا تیم B برنده می‌شود.

اگر A برنده است آنگاه داور بد قضاوت کرده‌است.

اگر داور بد قضاوت کرده‌است، آنگاه هوا روشن نبوده‌است.

هوا روشن بوده‌است.

برنده کی است؟

۳- آیا بحث زیر معتبر است؟ (قوانینی را که از آن استفاده می‌کنید نام ببرید) شهر یورما ۲۰۰۶

اگر قوانین سخت و خشن باشند، مردم بیرحم و سفاک می‌شوند.

اگر مردم بیرحم و سفاک شوند، از اندیشه‌های خوب محروم می‌شوند.

مردم از اندیشه‌های خوب محروم نمی‌شوند یا وحدت خود را از دست می‌دهند.

اگر مردم به اسارت کشیده نشوند، وحدت خود را از دست نمی‌دهند.

∴ اگر قوانین سخت و خشن باشند، مردم به اسارت کشیده می‌شوند.

۴- بدون رسم جدول ثابت کنید گزاره زیر استلزام منطقی است (همیشه درست است)

خردادماه ۶۳

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

خردادماه ۶۳

۵- آیا بحث زیر معتبر است؟ (چرا؟)

حسین به اکبر یا به مسعود رأی می‌دهد.

اگر حسین عقیده محمد را بپذیرد به مسعود رأی نمی‌دهد.

اگر حسین به اکبر رأی دهد مسعود انتخاب نمی‌شود.

∴ پس حسین عقیده محمد را نمی‌پذیرد یا مسعود انتخاب نمی‌شود.

۶- ثابت کنید گزاره زیر یک قضیه دوشروطی است. -- شهر یورماه ۳۳

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q$$

۷- ثابت کنید استنتاج زیر معتبر است. خردادماه ۳۳

$$\sim p \text{ --- } | \text{ --- } S \wedge (\text{شرط لازم برای } \sim r \text{ است که } q) \wedge (\text{شرط کافی برای } q \text{ است که } S) \wedge (r \Rightarrow \sim p)$$

۸- ثابت کنید که گزاره زیر قضیه دوشروطی است. شهریورماه ۳۳

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow \sim p$$

۹- ثابت کنید استنتاج زیر معتبر است. شهریورماه ۳۳

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_1 \wedge p_r) \Rightarrow p_r \\ (\sim p_r \vee p_r) \Rightarrow p_r \\ p_1 \end{array} \right\} \text{ --- } p_r$$

۱۰- بدون استفاده از جدول ثابت کنید گزاره زیر همیشه درست است. خردادماه ۳۳

$$(p \wedge \sim s) \vee (p \wedge s) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow (p \wedge \sim q))$$

۱۱- معتبر بودن استنتاج زیر را بررسی کنید (نام قانونی را که به کار می برید بنویسید). خردادماه ۳۳

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge \sim r \text{ --- } \sim p$$

ب- مسائل مربوط به فصل دوم

۱۲- ثابت کنید اگر a عددی صحیح و p و a نسبت به هم اول باشند آنگاه در حلقه

$(\mathbb{Z}_p, +, \otimes)$ عضو $[a]$ وارون پذیر است. خردادماه ۳۳

۱۳- در میدان $(\mathbb{Z}_n, +, \otimes)$ عمل \otimes به صورت $[a] \otimes [b] = [ab]$ تعریف شده عضو

متقابل $[20]$ را نسبت به عمل \otimes پیدا کنید. خردادماه ۳۳

۱۴- هرگاه $(G, +)$ یک گروه باشد و $S \subseteq G$ و $S \neq \emptyset$ ثابت کنید اگر برای هر

a و b در S ، $a - b \in S$ آنگاه S زیر گروه، گروه G می باشد. شهریورماه ۳۳

۱۵- با فرض اینکه مجموعه $Q/\sqrt{p} = \{a + b/\sqrt{p} \mid a, b \in Q\}$ همراه با اعمال جمع و

ضرب معمولی میدان باشد عضو متقابل هر عضو مجموعه $Q/\sqrt{p} - \{0\}$ را نسبت به عمل ضرب

پیدا کنید. خردادماه ۳۵

۱۶- اگر H و W زیر حلقه های حلقه R باشند ثابت کنید $H \cap W$ نیز زیر حلقه، حلقه

R می باشد. شهریورماه ۳۵

۱۷- در صورتیکه R مجموعه اعداد حقیقی و Z مجموعه اعداد درست و

$W = \{a + b \mid a \in \mathbb{Z} \text{ و } b \in \mathbb{R}\}$ نختین کنید آیا $(W, +, \times)$ يك حلقه است یا خیر؟ چرا؟

شهریورماه ۶۶

ج - مسائل مربوط به فصل سوم

۱۸- باروش استقراء ثابت کنید: (n) عدد طبیعی است

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

$$1 - \cos \alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos (2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}$$

۱۹- با استقراء ثابت کنید مشتق مرتبه n ام، $\sin x$ برابر است:

$$y^{(n)} = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

۲۰- با استقراء ثابت کنید مشتق مرتبه n ام، $y = \frac{ax+b}{1-x}$ برابر است:

$$y^{(n)} = \frac{(a+b)n!}{(1-x)^{n+1}}$$

۲۱- با استقراء ثابت کنید: (n) عدد طبیعی است.

$$1! \times 2! \times \dots \times (2n)! \geq [(n+1)!]^n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{۲۲- هرگاه}$$

$A^2 = O$ ثابت کنید A و از آنجا به استقراء

ثابت کنید:

$$(I + A)^{n+1} = (n+1)A + I$$

۲۳- به کمک استقراء ثابت کنید:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}(n^3 - 1)$$

۲۴- با استقراء ثابت کنید مشتق مرتبه n ام، x^n برابر $n!$ است.

۲۵- با استفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید که به ازاء هر عدد طبیعی n شهریورماه ۶۳

$$1 + \sum_{i=1}^n i(i!) = (n+1)!$$

۲۶- با استفاده از روش استقراء ثابت کنید برای تمام مقادیر طبیعی $n \geq 2$ داریم.

خردادماه ۶۴

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$$

۲۷- با استفاده از روش استقراء ثابت کنید بازای تمام مقادیر $n \in \mathbb{N}$ داریم. شهریورماه ۶۶

$$9^{n+1} - 8n - 9 \equiv 0 \quad (22)$$

۲۸- اولاً ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $3 \mid 4^n + 5$ خردادماه ۶۶

ثانیاً با استفاده از استقراء ثابت کنید: $8 = 2 \times 4^{2n} - 4^n - 1$ بر 9 بخش پذیر است.

۲۹- با استفاده از استقراء ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n : شهریورماه ۶۶

$$\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1) \times (3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

۳۰- اگر $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید:

الف - $3^{10n+2} \times 7^{2n+2} \times 10^{2n} + 3 \equiv 0$ (پیمانه ۱۳)

ب - $7^{6n+2} + 7^{2n+1} + 1 \equiv 0$ (پیمانه ۱۹)

ج - $7^{5n+2} + 5^n \times 7^{2n+2} \equiv 0$ (پیمانه ۱۷)

د - $8^n + 9^n - 17^n \equiv 0$ (پیمانه ۷۲)

ه - $7^{2n} + 6^n - 1 \equiv 0$ (پیمانه ۹)

ی - $8^{2k-1} \equiv 1$ (پیمانه 2^k) a فرد است

و - $7^{2n} + 7^{2n+2} \equiv 0$ (پیمانه ۵۰)

۳۱- مطلوب است جميع اعداد اول p که به ازاء آنها $16p+1$ مجذور کامل و کمند

طبیعی باشد.

۳۲- ثابت کنید به ازاء هر عدد صحیح مفروض k عدد صحیح مانند n وجود دارد که

$$5 \mid n^2 + k$$

۳۳- اگر a و b دو عدد درست و p عدد اول باشد.

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \quad (\text{پیمانه } p)$$

۳۴- ثابت کنید اگر k فرد باشد $19^{2k} + 11^{2k}$ بر 241 بخش پذیر است.

۳۵- رقم یکان عدد $3^n - 2^n$ را تعیین کنید.

۳۶- اگر n مضرب ۳ نباشد آنگاه $1 + 5^n + 5^{2n}$ بر 31

۳۷- ثابت کنید a^p و a^{p+2} رقم یکان مشترك دارند.

۳۸- ثابت کنید $19^n + 7^n + 13^n$ بر 39 بخش پذیر است (n فرد است).

۳۹- رقم سمت راست $3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ چیست؟

۴۰- ثابت کنید (پیمانه ab) $a^{b-1} + a^{b-1} \equiv 1$ (a و b اول هستند).

۴۱- ثابت کنید (پیمانه p^2) $a^p + b^p \equiv 0 \Rightarrow a^p + b^p \equiv 0 \pmod{p}$ (p اول و فرد

است).

۴۲- عدد صحیح n را چنان تعیین کنید که $13 + 2n$ بر $n - 1$ بخش پذیر باشد.

۴۳- عدد صحیح و مثبت n را چنان تعیین کنید که مجموع ارقام عدد $105n - 10^{2n}$ برابر ۲۳۴ باشد.

۴۴- اگر $4K \neq n$ ثابت کنید (پیمانه ۱۳) $3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 0$

۴۵- مطلوب است تعیین دو عدد صحیح و مثبت که مجموعشان مساوی ۱۶۰ و کوچکترین

مضرب مشترکشان ۶۳ برابر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان باشد. شهریورماه ۶۲

۴۶- اگر n عددی صحیح و بزرگتر یا مساوی صفر باشد ثابت کنید: شهریورماه ۶۲

$$3^{2n+2} + 3^{2n+1} + 1 \equiv 0 \quad (\text{پیمانه } 13)$$

۴۷- مطلوب است تعیین دو عدد صحیح و مثبت که مجموعشان ۲۸۵ و کوچکترین مضرب

مشترکشان ۱۰۵۰ باشد. خردادماه ۶۳

۴۸- ثابت کنید (پیمانه ۱۳) $5^{2n+2} + 5^{2n+1} + 1 \equiv 0$ خردادماه ۶۳

۴۹- ثابت کنید به ازاء هر عدد طبیعی و یا صحیح n عبارت $5n + 6$ و $16n^2 + 16n + 6$

نسبت به هم اولند. شهریورماه ۶۳

۵۰- نسبت دو عدد صحیح و مثبت برابر $\frac{5}{9}$ است و میدانیم تفاضل حاصلضرب آنها از

کوچکترین مضرب مشترک آن دو برابر ۳۹۶۰ می باشد آن دو عدد را محاسبه کنید. شهریورماه ۶۳

۵۱- ثابت کنید (پیمانه ۱۷) $4^{2n+2} - 4^{2n+1} + 3^{2n+2} \equiv 0$ (عدد طبیعی است) شهریورماه ۶۳

۵۲- تحقیق کنید (پیمانه ۶۲) $5^3 - 3^3 - 16^n + 96^n \equiv 0$ (خردادماه ۶۴) $(n \in \mathbb{N})$

۵۳- ثابت کنید (پیمانه ۴۳) $7 + 3^{2n-1} \equiv 0$ (شهریورماه ۶۴) $(n \in \mathbb{N})$

۵۴- a و $b \in \mathbb{N}$ و $(a, b) = 14$ و در تعیین بزرگترین شمارنده مشترک بوسیله تقسیمات

متوالی سلسله خارج قسمتها به ترتیب ۳ و ۸ و ۲ و ۴ شده a و b را پیدا کنید.

شهریورماه ۶۴

۵۵- اگر باقیماندهای تقسیم عدد صحیح a بر ۸ و ۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشند باقیمانده

تقسیم عدد a را بر ۵۶ پیدا کنید. خردادماه ۶۵

۵۶- اولاً ثابت کنید مربع هر عدد فرد مضرب ۸ به اخافه ۱ است ثانیاً ثابت کنید

$(n^2 + 2n)(n^2 - 1)$ به ازاء تمام مقادیر صحیح n بر ۸ قابل قسمت است. خردادماه ۶۵

۵۷- اگر دو عدد a و $b \in \mathbb{N}$ هر دو زوج یا هر دو فرد باشند ثابت کنید $b - 105 - 1$ بر ۱۰۵

بخش پذیر می شود. شهریورماه ۶۵

۵۸- دو عدد ۸۳ و ۱۰۷ را بر عدد طبیعی b تقسیم کردیم باقیماندهها به ترتیب ۵ و ۳

شده عدد b را پیدا کنید. شهریورماه ۶۵

۵۹- ثابت کنید دو عدد $2n+1$ و $2n^2+2n+1$ به ازاء جميع مقادير n نسبت به هم اولند.

۶۰- در صورتیکه $[a, b] = m$ و $1 < (a, b) = d < 10$ و $m-d=22$ مطلوبست اعداد طبیعی a و b .

۶۱- باقیمانده تقسیم عدد $A = 2^{2(18n+1)} + 10n+1 + 7$ را بر ۹ پیدا کنید ($n \in \mathbb{N}$)

شهریورماه ۶۶

۵- مسائل مربوط به فصل چهارم

۶۲- هرگاه A و X ماتریس و λ عدد حقیقی باشد باستقراء ثابت کنید.

$$AX = \lambda X \Rightarrow A^n X = \lambda^n X$$

۶۳- هرگاه $A = \begin{bmatrix} \lambda u & u^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda u \end{bmatrix}$ باشد ثابت کنید: $A^2 = \bar{0}$

۶۴- هرگاه X ماتریسی غیر صفر باشد در تساوی زیر X را پیدا کنید:

$$\begin{bmatrix} \cdot & a & b \\ -a & \cdot & c \\ -b & -c & \cdot \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

۶۵- هرگاه A يك ماتریس باشد با استفاده از استقراء و $A^2 = A$ ثابت کنید:

$$(I + A)^n = I + (2^n - 1)A$$

۶۶- هرگاه $X = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}b & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{2}b \end{bmatrix}$ و Z در رابطه های $ZX = Y$ و $XYZ = I$ صدق کند مقدار b را حساب کنید.

۶۷- هرگاه $A = \begin{bmatrix} 4 & c & -b \\ -c & 4 & a \\ b & -a & 4 \end{bmatrix}$ ، ترکیبی از A و I بنویسید که ماتریس

حاصل پادمتقارن (ضمتقارن) باشد.

۶۸- ماتریس مربعی مرتبه ۲، A دارای خواص زیر است:

$$A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \text{ و } A \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \text{ و } u = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ ثابت کنید } A = VU^{-1} \text{ که در آن}$$

۶۹- بدون بسط ثابت کنید.

$$\text{الف-} \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \gamma \alpha \\ \cos \alpha & \cos \gamma \alpha & \cos \beta \alpha \\ \cos \gamma \alpha & \cos \beta \alpha & \cos \varphi \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ب-} \begin{vmatrix} 1 & \log x & \log yz \\ 1 & \log y & \log xz \\ 1 & \log z & \log xy \end{vmatrix} = 0$$

۷۰- بدون بسط ثابت کنید.

$$\text{الف-} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^x & y^y & z^z \\ x^y & y^x & z^x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^x & y^y & z^z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$$

$$\text{ب-} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz$$

۷۱- بدون بسط مقدار دترمینان زیر را حساب کنید. (کنکور تشریحی ۶۲)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

۷۲- ثابت کنید اگر A و B ماتریسهای مرتبه n و هر دو متقارن یا هر دو ضد متقارن و تعویض پذیر باشند آنگاه AB متقارن است.

۷۳- هرگاه $B = rA + SI$ و A و B معکوس پذیر باشند ثابت کنید:

$$A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

۷۴- هرگاه B ماتریس وارون پذیر بوده داشته باشیم $Q = BAB^{-1}$ یا استقراء ثابت

کنید $Q^n = BA^nB^{-1}$.

۷۵- اگر داشته باشیم $\sum_{k=1}^n (ak+b) = L$ مطلوبست محاسبه $\sum_{k=1}^n k$ بر حسب a و b و L .

۷۶- هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، α و β را طوری تعیین کنید که داشته باشیم

$$A^T = \alpha A + \beta I_2$$

ثانیاً با استفاده از آن و بدون استفاده از ماتریس الحاقی A^{-1} را حساب کنید.

۷۷- اگر λ_1 يك مقدار ویژه ماتریس مرتبه γ ، A باشد ثابت کنید $\frac{|A|}{\lambda_1}$ مقدار ویژه

دیگر آن است. ($\lambda_1 \neq 0$)

۷۸- هرگاه V يك ماتریس متعامد و D يك ماتریس قطری باشد داشته باشیم $AV = VD$ ثابت کنید A يك ماتریس متقارن است.

۷۹- هرگاه A يك ماتریس و $A^2 = 0$ ثابت کنید ماتریس $A + I$ وارون پذیر است.

۸۰- ثابت کنید اگر A ماتریس ضد متقارن با مرتبه فرد باشد آنگاه $|A| = 0$.

۸۱- هرگاه ماتریس A در معادله: $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I = 0$ صدق کند $\gamma \neq 0$ وارون A را محاسبه کنید.

۸۲- هرگاه $A^2 = A$ (ماتریس است) ثابت کنید $|A| = 0$ ($|A| \neq 1$).

۸۳- هرگاه N' ماتریس الحاقی وابسته به ماتریس A باشد ثابت کنید

$$|N'| = (|A|)^{n-1}$$

۸۴- اگر A و B دو ماتریس مربع مرتبه n باشد آیا هر مقدار ویژه AB يك مقدار

ویژه BA است؟ آیا هر بردار ویژه AB يك بردار ویژه BA است؟

۸۵- فرض کنید $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ و اعداد c و d وجود داشته باشند که به ازاء هر

$$i \text{ و } j, a_{ij} = ic + jd \text{ (مثلاً) اگر } n=2 \text{ } A = \begin{bmatrix} c+d & c+2d \\ 2c+d & 2c+2d \end{bmatrix}$$

اگر $n > 2$ ثابت

$$|A| = 0$$

۸۶- اگر $A^2 = A$ و $\lambda \neq 1$ ثابت کنید $I_n - \lambda A$ وارون پذیر است و داریم:

$$(I_n - \lambda A)^{-1} = I_n + \frac{\lambda}{1-\lambda} A$$

در دو حالت حل کنید. الف - $|A| \neq 0$ ب - در حالت کلی.

۸۷- فرض کنید A و B دو ماتریس مرتبه n باشند ثابت کنید $I - AB$ وارون پذیر

است اگر و فقط اگر $I - BA$ وارون پذیر باشد. در دو حالت حل کنید الف - $|B| \neq 0$ ب - در حالت کلی.

۸۸- اگر A ، بوج توان باشد ($A^n = 0$) ثابت کنید $|A| = 0$.

۸۹- اگر A ماتریس متقارن معکوس پذیر و B ماتریس ضد متقارن و $(A+B)(A-B)$.

معکوس پذیر باشد ثابت کنید اگر $M = (A+B)^{-1}(A-B)$ آنگاه $A = M'AM$.

۹۰- الف - اگر A' قرینه نقطه $(1, 3)$ نسبت به خط $y = -x$ باشد ماتریس تقارن

نسبت به این خط را بنویسید و مختصات A' را تعیین کنید.

بد اگر B' دوران یافته $B(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ حول مبدأ مختصات تحت زاویه 45° باشد ماتریس دوران را نوشته مختصات B' را بیابید.

ج - اگر C' معانی $(1, -2)$ نسبت به مبدأ مختصات و با نسبت تجانس $1/2$ باشد ماتریس تجانس را بنویسید و مختصات C' را بیابید.

شهریورماه ۶۶

۹۱- يك ماتریس تعامد بدست آورید كه مقطع مخروطی به معادله:

$$7x^2 - 10xy + 4y^2 - 16\sqrt{2}x - 32 = 0$$

را به صورت استاندارد درآورد. صورت استاندارد را هم بنویسید.

شهریورماه ۶۶

۹۲- با استفاده از خواص دترمینان (بدون بسط طرلین) ثابت کنید تساوی زیر برقرار است.

خردادماه ۶۶

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & c & a+b+c \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c \\ 1 & a+b & 0 \end{vmatrix}$$

۹۳- به نقطه $A(3, 4)$ ابتدا انتقالی به اندازه $\vec{op} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ داده و پس از آن قرینه

نقطه انتقال یافته را نسبت به خط $y = x + 2$ بدست می آوریم با استفاده از ماتریس ترکیبهای متوالی ماتریس این دوتبدیل را بدست آورید.

خردادماه ۶۶

۹۴- دستگاه زیر را به کمک ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 6 \end{cases}$$

خردادماه ۶۶

۹۵- يك تبدیل تعامدی تعیین کنید كه مقطع مخروطی

$$7x^2 - 12xy - 4y^2 + x + 2y - 5 = 0$$

را به صورت استاندارد بیرون آورد و شکل استاندارد آنرا نیز بدست آورید (يك تبدیل کافی است)

خردادماه ۶۶

۹۶- با استفاده از خواص دترمینان ثابت کنید تساوی زیر برقرار است.

شهریورماه ۶۶

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \quad (a \neq b \neq c \neq a)$$

۹۷- نقطه $M(56)$ را حول نقطه $A(3 و 4)$ با اندازه 90° دوران می‌دهیم تا به وضع

M' درآید ماتریس این تبدیل و مختصات نقطه M' را بدست آورید. شهریورماه ۶۳

۹۸- اگر A' قرینه نقطه $A(3 و 1)$ نسبت به خط $y = 2x$ و A'' قرینه A' نسبت به

خط $y = 1$ باشند اولاً ماتریسی پیدا کنید که A را به A'' تبدیل کند ثانیاً با استفاده از آن مختصات

A'' را پیدا کنید. خردادماه ۶۴

۹۹- یک تبدیل متعامد پیدا کنید که مقطع مخروطی به معادله:

$$x^2 + 2xy - 2y^2 - 2x - 2y = 1$$

را به صورت استاندارد بیرون آورد. (نوشتن صورت استاندارد لازم نیست) خردادماه ۶۴

۱۰۰- با استفاده از قوانین دترمینان و دترمینان ماتریس بالا مثالی بدون بسط دترمینان

صحت تساوی زیر را ثابت کنید. خردادماه ۶۴

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

۱۰۱- با استفاده از ماتریس تفران نسبت به خط $y = mx + c$ قرینه نقطه $M(1 و 2)$ را

نسبت به خط $y = 2x + 3$ پیدا کنید. شهریورماه ۶۴

۱۰۲- با استفاده از قوانین دترمینان و دترمینان بالا مثالی بدون بسط دترمینان صحت تساوی

زیرا ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

۱۰۳- اگر B ماتریس معکوس پذیر باشد ثابت کنید. $|B^{-1}AB - \lambda I| = |A - \lambda I|$

خردادماه ۶۵ (I ماتریس واحد است)

۱۰۴- دترمینان طرف اول تساوی را با استفاده از قوانین و بسط دترمینان آنگذر ساده کنید

تا طرف دوم بدست آید. خردادماه ۶۵

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a' & b' \\ 0 & -1 & c' & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{vmatrix}$$

۱۰۵- صورت استاندارد مقطع مخروطی به معادله $2x^2 + 8xy + 2y^2 - y = 10$ را

پیدا کنید. شهریورماه ۶۵

۱۰۶- با استفاده از خواص دترمینان و دترمینان بالامثلی صحت تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc$$

۱۰۷- از معادله $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ مقادیر x و y و z را پیدا کنید.

شهریورماه ۵۵

۱۰۸- اگر نقطه M' لریته نقطه $M(1, 2)$ نسبت به خط $y = 2x$ و نقطه M'' دوران

یافته M' به اندازه 90° باشد مختصات نقطه M'' را پیدا کنید. شهریورماه ۵۵

۱۰۹- بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینانها ثابت کنید. خردادماه ۵۵

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+a & a^2(b+c) \\ 1 & 1+b & b^2(a+c) \\ 1 & 1+c & c^2(a+b) \end{vmatrix} = 0$$

۱۱۰- اگر A و B دو ماتریس وارونیپذیر از مرتبه n و $AB=BA$ و $A^2=A$ و

$B^2=B$ و $k \neq -1$ اولاً ثابت کنید ماتریس $W = I_n + kAB$ وارونیپذیر است.

ثانیاً ثابت کنید $W^{-1} = I_n - \frac{k}{k+1}AB$ خردادماه ۵۵

۱۱۱- اولاً شکل درجه دوم $3x^2 + 4xy$ را به صورت ماتریس نمایش دهید.

ثانیاً صورت استاندارد آنرا بنویسید. خردادماه ۵۵

۱۱۲- در صورتیکه اعداد دورقمی \overline{ab} و \overline{cd} بر عدد ۷ بخش پذیر باشد با استفاده از

ویژگیهای دترمینان ثابت کنید حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$ بر ۲۲ بخش پذیر است.

شهریورماه ۵۵

۱۱۳- معکوس يك ماتریس مثلثی را در حالت کلی حساب کنید و شرط معکوس پذیر بودن آن

را بنویسید.

۱۱۴- مقادیر خاص و بردارهای خاص يك ماتریس قطری را در حالت کلی پیدا کنید.

۱۱۵- مقادیر خاص يك ماتریس مثلثی را در حالت کلی پیدا کنید.

۱۱۶- ثابت کنید مقادیر خاص عکس هر ماتریس معکوس مقادیر خاص خود ماتریس است.

۱۱۷- ثابت کنید مقادیر خاص ترانزاده هر ماتریس مقادیر خاص خود ماتریس است.

۱۱۸- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ مبروح است اولاً مقادیر خاص آن را حساب

کنید. ثانیاً دوستی رابطه $A^3 = 2A^2 - 1 + A^2 - 2A^2 - 2$ را تحقیق کنید.

۱۱۹- اگر A و B دو ماتریس مربعی غیر صفر و $AB = 0$ ثابت کنید

$$|B| = 0 \text{ و } |A| = 0$$



